

Inhaltsverzeichnis

1 Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können	1
1.1 Mengen	1
1.2 Äquivalenzrelationen.....	4
1.3 Abbildungen	6
1.4 Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?.....	11
1.5 Die Σ -Notation	16
1.6 Beweisprinzipien.....	18
Richtig oder falsch?	19
Übungsaufgaben	20
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	23
Was sagen Sie dazu?.....	23
2 Körper	24
2.1 Die Definition	24
2.2 Beispiele von Körpern.....	27
2.2.1 Der Körper der komplexen Zahlen	27
2.2.2 Der Quaternionenschiefkörper	30
2.2.3 Einige endliche Körper.....	33
2.3 Automorphismen von Körpern.....	39
2.3.1 Die Definitionen.....	39
2.3.2 Der Körper der rationalen Zahlen.....	40
2.3.3 Der Körper der reellen Zahlen.....	41
2.3.4 Konjugiert-komplexe Zahlen	42
Richtig oder falsch?	43
Übungsaufgaben	44
Projekt: Die Gaußsche Zahlenebene.....	45
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	47
3 Vektorräume	48
3.1 Die Definition	48
3.2 Beispiele von Vektorräumen	50
3.2.1 Vektorräume mit Hilfe von Geometrie	50
3.2.2 Der Vektorraum K^n	50
3.2.3 Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen.....	50
3.2.4 Der Vektorraum aller unendlichen Folgen	51
3.2.5 Ein Vektorraum unendlicher Folgen	52
3.2.6 Vektorräume von Funktionen.....	52
3.2.7 Lösungen eines Gleichungssystems	52

3.2.8	Teilmengen einer Menge	52
3.2.9	Körper als Vektorräume	53
3.3	Elementare Theorie der Vektorräume	54
3.3.1	Der Begriff der Basis	54
3.3.2	Der Steinitzsche Austauschsatz	61
3.3.3	Der Dimensionssatz	67
3.3.4	Faktorräume	69
3.4	Zur Geschichte der linearen Algebra	75
	Richtig oder falsch?	77
	Übungsaufgaben	80
	Projekt: Der unendlichdimensionale Vektorraum V_∞	84
	Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:	86
4	Anwendungen von Vektorräumen	87
4.1	Affine Geometrie	87
4.1.1	Affine Räume	87
4.1.2	Unterräume	90
4.2	Lineare Gleichungssysteme	92
4.2.1	Begriffe und Fragen	92
4.2.2	Exkurs über Matrizen	93
4.2.3	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	97
4.2.4	Der Gaußsche Algorithmus	102
4.3	Codierungstheorie	108
4.3.1	Grundlegende Begriffe	108
4.3.2	Lineare Codes	111
	Richtig oder falsch?	116
	Übungsaufgaben	118
	Projekt: Die Hamming-Codes	121
	Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:	123
	Was sagen Sie dazu?	123
5	Lineare Abbildungen	124
5.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	124
5.2	Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen	129
5.3	Der Homomorphiesatz	136
5.4	Der Dualraum	139
	Richtig oder falsch?	142
	Übungsaufgaben	144
	Projekt: $\text{Hom}(V, W)$	146
	Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:	147

6 Polynomringe	148
6.1 Ringe.....	148
6.2 Was ist eigentlich x ?.....	150
6.3 Polynomdivision.....	156
6.4 Ideale von $K[x]$	160
Richtig oder falsch?.....	162
Übungsaufgaben.....	163
Projekte.....	166
Projekt A: Der Ring \mathbf{Z}	166
Projekt B: Der Ring $\mathbf{H}[x]$	167
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	169
7 Determinanten	170
7.1 Die Determinantenfunktion.....	170
7.2 Permutationen.....	173
7.3 Gerade und ungerade Permutationen.....	176
7.4 Die Leibnizsche Determinantenformel.....	182
7.5 Wie berechnet man eine Determinante?.....	186
7.6 Der Multiplikationssatz.....	195
Richtig oder falsch?.....	198
Übungsaufgaben.....	198
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	200
Was sagen Sie dazu?.....	200
8 Diagonalisierbarkeit	201
8.1 Eigenvektoren und Eigenwerte.....	202
8.2 Das charakteristische Polynom.....	207
8.3 Das Minimalpolynom.....	213
Richtig oder falsch?.....	220
Übungsaufgaben.....	222
Projekt: Drehungen.....	225
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	225
Was sagen Sie dazu?.....	225
9 Elementarste Gruppentheorie	226
9.1 Beispiele von Gruppen.....	226
9.1.1 Gruppen in bekannten Strukturen.....	227
9.1.2 Gruppen aus bekannten Objekten.....	228
9.1.3 Gruppen aus Permutationen.....	229
9.2 Einfache Strukturaussagen für Gruppen.....	232
9.2.1 Untergruppen.....	232
9.2.2 Zyklische Gruppen.....	234
9.2.3 Der Homomorphiesatz.....	237

Richtig oder falsch?	240
Übungsaufgaben	241
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:	243
10 Skalarprodukte	244
10.1 Ein Beispiel	244
10.2 Bilinearformen	246
10.3 Skalarprodukte	254
10.4 Orthogonale Abbildungen	261
10.5 . . . und eine zweite symmetrische Bilinearform?	269
Richtig oder falsch?	273
Übungsaufgaben	274
Projekt: Skalarprodukte komplexer Vektorräume	275
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:	278
Adieu!	279
Lösungsvektoren der \square-Aufgaben	280
Stichwortverzeichnis	282
Literaturverzeichnis	289