

Inhalt

1 Einige Grundbegriffe über Kategorien

1.1 Definition von Kategorien	9
1.2 Beispiele für Kategorien	12
1.3 Funktoren	14
1.4 Funktorielle Morphismen und adjungierte Funktoren	16
1.5 Produkte und Koprodukte	19
Übungen zu Kapitel 1	22

2 Moduln, Untermoduln und Faktormoduln

2.1 Voraussetzungen	23
2.2 Untermoduln und Ideale	24
2.3 Durchschnitt und Summe von Untermoduln	27
2.4 Innere direkte Summen	36
2.5 Faktormoduln und Faktoringe	37
Übungen zu Kapitel 2	40

3 Homomorphismen von Moduln und Ringen

3.1 Definitionen und einfache Eigenschaften	43
3.2 Ringhomomorphismen	51
3.3 Generatoren und Kogeneratoren	53
3.4 Produktzerlegung von Homomorphismen	55
3.5 Der Satz von Jordan-Hölder-Schreier	62
3.6 Funktoreigenschaften von Hom	65
3.7 Der Endomorphismenring eines Moduls	68
3.8 Duale Moduln	70
3.9 Exakte Folgen	72
Übungen zu Kapitel 3	76

4 Direkte Produkte, direkte Summen, freie Moduln

4.1 Konstruktion von Produkten und Koprodukten	77
4.2 Zusammenhang zwischen der äußeren und inneren direkten Summe	80
4.3 Homomorphismen von direkten Produkten und Summen	81
4.4 Freie Moduln	83
4.5 Freie und teilbare abelsche Gruppen	86
4.6 Monoidringe	88

4.7 Fasersumme und Faserprodukt	89
4.8 Eine Kennzeichnung von Generatoren und Kogeneratoren	93
Übungen zu Kapitel 4	96

5 Injektive und projektive Moduln

5.1 Kleine und große Untermoduln	99
5.2 Komplemente	104
5.3 Definition injektiver und projektiver Moduln und einfache Folgerungen	107
5.4 Projektive Moduln	111
5.5 Injektive Moduln	112
5.6 Injektive und projektive Hüllen	115
5.7 Das Baersche Kriterium	120
5.8 Weitere Kennzeichnungen und Eigenschaften von Generatoren und Kogeneratoren	122
Übungen zu Kapitel 5	127

6 Artinsche und noethersche Moduln

6.1 Definitionen und Charakterisierungen	134
6.2 Beispiele	138
6.3 Der Hilbertsche Basissatz	142
6.4 Endomorphismen von artinschen und noetherschen Moduln	143
6.5 Eine Kennzeichnung von noetherschen Ringen	145
6.6 Zerlegung injektiver Moduln über noetherschen und artinschen Ringen	148
Übungen zu Kapitel 6	151

7 Lokale Ringe, der Satz von Krull-Remak-Schmidt

7.1 Lokale Ringe	155
7.2 Lokale Endomorphismenringe	158
7.3 Der Satz von Krull-Remak-Schmidt	164
Übungen zu Kapitel 7	169

8 Halbeinfache Moduln und Ringe

8.1 Definition und Kennzeichnung	172
8.2 Halbeinfache Ringe	178
8.3 Struktur der einfachen Ringe mit einem einfachen einseitigen Ideal	182
8.4 Der Dichtesatz	185
Übungen zu Kapitel 8	190

9 Radikal und Sockel

9.1 Definition von Radikal und Sockel	192
9.2 Weitere Eigenschaften des Radikals	197

9.3 Das Radikal eines Ringes	199
9.4 Kennzeichnung endlich erzeugter und endlich koerzeugter Moduln	204
9.5 Zur Kennzeichnung von artinschen und noetherschen Ringen	207
9.6 Das Radikal des Endomorphismenringes eines injektiven oder projektiven Moduln	209
9.7 Gute Ringe	212
Übungen zu Kapitel 9	214

10 Das Tensorprodukt, flache Moduln und reguläre Ringe

10.1 Definition und Faktorisierungseigenschaft	218
10.2 Weitere Eigenschaften des Tensorproduktes	222
10.3 Funktoreigenschaften des Tensorproduktes	226
10.4 Flache Moduln und reguläre Ringe	229
10.5 Flache Faktormoduln von flachen Moduln	237
Übungen zu Kapitel 10	239

11 Semi-perfekte Moduln und perfekte Ringe

11.1 Semi-perfekte Moduln, Grundbegriffe	244
11.2 Hochheben von direkten Zerlegungen	248
11.3 Hauptsatz über projektive, semi-perfekte Moduln	249
11.4 Direkt unzerlegbare semi-perfekte Moduln	254
11.5 Eigenschaften von Nilidealen und von t -nilpotenten Idealen	257
11.6 Perfekte Ringe	261
Übungen zu Kapitel 11	268

12 Ringe mit vollkommener Dualität

12.1 Einleitung und Formulierung des Hauptsatzes	271
12.2 Dualitätseigenschaften	273
12.3 Seitenwechsel	280
12.4 Annulatoreigenschaften	281
12.5 Injektivität und Kogeneratoreigenschaften eines Ringes	284
12.6 Beweis des Hauptsatzes	288
Übungen zu Kapitel 12	290

13 Quasi-Frobeniusringe

13.1 Einleitung	295
13.2 Definition und Hauptsatz	296
13.3 Dualitätseigenschaften von Quasi-Frobeniusringen	298
13.4 Die klassische Definition	301
13.5 Quasi-Frobeniusalgebren	305
13.6 Kennzeichnung von Quasi-Frobeniusringen	311
Übungen zu Kapitel 13	319

Literaturhinweise

Lehrbücher über Ringe und Moduln	322
Literatur zu den Kapiteln 11 bis 13	322
Namen- und Sachverzeichnis	326

Benutzte Symbole

<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>
$\wedge$	und
$\vee$	oder (im nicht ausschließenden Sinne)
$\forall$	Allquantor („für alle“ bzw. „für jedes“)
$\exists$	Existenzquantor („es existiert“)
$\Rightarrow$	Implikation
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$\begin{matrix} : \Leftrightarrow \\ := \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} : \Leftrightarrow \\ := \end{matrix}} \right\}$	Definitionen
$\nmid$	Widerspruch
$\subset$	Teilmenge
$\subsetneq$	echte Teilmenge
$\not\subset$	nicht Teilmenge
$\hookrightarrow$	Unterobjekt im Sinne der jeweiligen Struktur
$\subsetneq$	echtes Unterobjekt
$\nrightarrow$	nicht Unterobjekt
$/$	teilt (a/b bedeutet „a teilt b“)
$\setminus$	Komplementärmenge ($A \setminus B := \{a a \in A \wedge a \notin B\}$)
$\square$	Ende eines Beweises
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$)
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen

Beachte den Unterschied zwischen $A, B, C, \dots$ und $A, B, C, \dots$ (z.B. in $M \in M_{\mathbb{R}}$).