

TABLE DES MATIERES

PREFACE

PRELIMINAIRES

1. Ensembles ordonnés	1
2. Structures algébriques	6
3. Groupes, anneaux, treillis	9

Chapitre 1 NOTIONS FONDAMENTALES

1.1. Groupes ordonnés	14
1.2. Groupes réticulés	16
1.3. Partie positive, partie négative, valeur absolue	22
1.4. Homomorphismes de groupes réticulés	25
1.5. Constructions usuelles	26
1.6. Groupes réticulés commutatifs	29
1.7. Exemples	32
Note du chapitre 1	33

Chapitre 2 SOUS-GROUPES SOLIDES

2.1. Sous-groupes réticulés et sous-groupes convexes	36
2.2. Sous-groupes solides	38
2.3. Homomorphismes et ℓ -idéaux	41
2.4. Sous-groupes premiers	44
2.5. Sous-groupes réguliers	46
2.6. Le théorème de Hölder	48
Note du chapitre 2	50

Chapitre 3 POLAIRES

3.1. Eléments orthogonaux	52
3.2. Définition et premières propriétés des polaires	53

3.3. Filets et z -sous-groupes	56
3.4. Sous-groupes premiers minimaux	59
3.5. Décomposition d'un groupe réticulé en facteurs directs	64
Note du chapitre 3	68

Chapitre 4 REPRESENTATION DES GROUPES RETICULES

4.1. Groupes transitifs	69
4.2. Groupes représentables	72
4.3. Groupes à valeurs normales	75
4.4. Représentation des groupes à valeurs normales	80
4.5. Groupes ordonnés à gauche	83
Note du chapitre 4	86

Chapitre 5 EXTENSIONS ARCHIMEDIENNES

5.1. Majoration du cardinal d'un groupe réticulé	90
5.2. Généralités sur les extensions archimédiennes	93
5.3. Extensions archimédiennes des groupes réticulés trans-	
sitifs	96
5.4. Le théorème de Hahn	102
5.5. Complétés archimédiens commutatifs des groupes réti-	
culés	103
Note du chapitre 5	106

Chapitre 6 GROUPES COMPLETEMENT DISTRIBUTIFS ET GROUPES VALUES-FINIS

6.1. Sous-groupes fermés	109
6.2. Les radicaux d'un groupe réticulé	113
6.3. Groupes complètement distributifs	115
6.4. Groupes valués-finis	119
6.5. Groupes valués-finis commutatifs: représentation de	
Hahn et extensions archimédiennes	122
Note du chapitre 6	125

Chapitre 7 PROPRIETES LIEES A L'ORTHOGONALITE

7.1. Extensions lexicographiques	128
7.2. Sous-groupes convexes totalement ordonnés	132
7.3. Bases	134
7.4. Groupes ortho-finis	137

7.5. Groupes projetables	142
7.6. Groupes latéralement complets	144
Note du chapitre 7	147

Chapitre 8 ANNEAUX RETICULES

8.1. Anneaux ordonnés et réticulés. Exemples	149
8.2. Les ℓ -idéaux d'un anneau réticulé	154
8.3. Homomorphismes, anneaux réticulés quotients et produits sous-directs	159
8.4. ℓ -idéaux irréductibles	162
8.5. ℓ -idéaux premiers et semi-premiers	163
8.6. Radicaux	165

Chapitre 9 ANNEAUX RETICULES PRODUITS SOUS-DIRECTS D'ANNEAUX TOTALEMENTS ORDONNES

9.1. Définition et propriétés élémentaires des f-anneaux	172
9.2. Le ℓ -radical et ℓ -idéaux premiers d'un f-anneau	176
9.3. f-anneaux réduits et idéaux premiers minimaux	178
9.4. Éléments idempotents et sur-idempotents; f-anneaux ℓ -simples	180
9.5. ℓ -idéaux dominés	187
9.6. f-anneaux S -semi-simples et le S -radical	189
9.7. Plongement dans un f-anneau unitaire	192
Note des chapitres 8 et 9	196

Chapitre 10 LE SPECTRE ET LA REPRESENTATION PAR DES SECTIONS DANS DES FAISCEAUX

10.1. Le spectre d'un f-anneau et d'un groupe réticulé commutatif	201
10.2. Les espaces de ℓ -idéaux irréductibles	205
10.3. L'espace de Stone	207
10.4. Faisceaux de groupes et d'anneaux réticulés	211
10.5. ℓ -idéaux germinaux	214
10.6. Représentation par des sections d'un faisceau	217
Note du chapitre 10	221

Chapitre 11 GROUPES ARCHIMEDIENS ET GROUPES COMPLETS

11.1. Propriétés générales	224
11.2. Groupes réticulés complets et groupes singuliers	229
11.3. Complétion de Dedekind d'un groupe réticulé	235
Note du chapitre 11	239

Chapitre 12 ORTHOMORPHISMES ET f -ANNEAUX ARCHIMEDIENS

12.1. Endomorphismes d'un groupe réticulé commutatif	241
12.2. Orthomorphismes d'un groupe archimédien	244
12.3. f -anneaux archimédiens	250
Note du chapitre 12	256

Chapitre 13 REPRESENTATION PAR DES FONCTIONS NUMERIQUES CONTINUES

13.1. Groupes et anneaux réticulés de fonctions continues	258
13.2. Représentation d'un groupe archimédien par des fonctions numériques continues presque finies	263
13.3. Représentation des orthomorphismes et des f -anneaux archimédiens par des fonctions numériques continues	268
13.4. Représentation sur l'espace de Stone	272
13.5. Représentation des groupes archimédiens singuliers	275
Note du chapitre 13	278

Chapitre 14 GROUPES HYPER-ARCHIMEDIENS ET SOMMES DIRECTES DE GROUPES REELS

14.1. Groupes hyper-archimédiens	281
14.2. Anneaux hyper-archimédiens	285
14.3. Anneaux quasi-réguliers	288
14.4. Sommes directes de groupes réels	289
14.5. Groupes factoriels	293
Note du chapitre 14	294

Appendice GROUPES RETICULES LIBRES

A.1. Groupes réticulés commutatifs libres	296
A.2. Groupes réticulés universels (libres) sur un groupe ordonné	302

BIBLIOGRAPHIE	306
INDEX DES NOTATIONS	328
INDEX TERMINOLOGIQUE	331