

1.	<i>Dreiecke</i>	
1.1	Euklid	15
1.2	Grundbegriffe und Axiome	16
1.3	Die Eselsbrücke	19
1.4	Die Mittellinien und der Schwerpunkt	24
1.5	Der Inkreis und der Um- kreis	25
1.6	Die Eulersche Gerade und der Höhenschnittpunkt ..	32
1.7	Der Neunpunktekreis.. ..	34
1.8	Zwei Extremalaufgaben ..	36
1.9	Der Satz von Morley	40
2.	<i>Regelmäßige Vielecke</i>	
2.1	Die Kreisteilung	43
2.2	Die Winkeldreiteilung ..	45
2.3	Die Bewegung.. .. .	46
2.4	Die Symmetrie	47
2.5	Die Gruppen	49
2.6	Das Produkt zweier Spiegelungen	51
2.7	Das Kaleidoskop	52
2.8	Die Sternpolygone	55
3.	<i>Bewegungen in der Euklidischen Ebene</i>	
3.1	Eigentliche und uneigent- liche Bewegungen.. .. .	59
3.2	Verschiebungen	62
3.3	Gleitspiegelung	64
3.4	Spiegelungen und Halb- drehungen.. .. .	66
3.5	Zusammenfassung der Er- gebnisse über Bewegungen	67
3.6	Der Satz von Hjemlev	68
3.7	Streifenmuster	69

4.	<i>Zweidimensionale Kristallographie</i>	
4.1	Gitter und ihre Dirichlet- Bereiche	73
4.2	Die Symmetriegruppe des allgemeinen Gitters	79
4.3	Die Kunst von M.C. Escher	82
4.4	Sechs Muster aus Domi- nos	84
4.5	Die Einschränkung der Kristallographie	85
4.6	Regelmäßige Unterteilun- gen	86
4.7	Die Aufgabe von Sylvester über kollineare Punkte ..	90
5.	<i>Ähnlichkeit in der Euklidi- schen Ebene</i>	
5.1	Streckungen	93
5.2	Ähnlichkeitszentrum	96
5.3	Das Neunpunktezentrum	97
5.4	Drehstreckung und Streck- spiegelung	98
5.5	Eigentliche Ähnlichkeit ..	100
5.6	Uneigentliche Ähnlichkeit	101
6.	<i>Kreise und Kugeln</i>	
6.1	Inversion an einem Kreis	104
6.2	Orthogonale Kreise	107
6.3	Inversion von Geraden und Kreisen	108
6.4	Die konforme Ebene	111
6.5	Koaxiale Kreise	114
6.6	Der Kreis des Apollonius ..	118
6.7	Kreiserhaltende Trans- formationen	121
6.8	Inversion an einer Kugel ..	122
6.9	Die elliptische Ebene	123

7.	<i>Bewegung und Ähnlichkeit im Euklidischen Raum</i>	
7.1	Eigentliche und uneigentliche Bewegungen.. ..	128
7.2	Die Punktspiegelung	139
7.3	Drehung und Verschiebung	131

Teil

8.	<i>Koordinaten</i>	
8.1	Kartesische Koordinaten	139
8.2	Polarkoordinaten	143
8.3	Der Kreis	146
8.4	Kegelschnitte	149
8.5	Tangente, Bogenlänge und Fläche	154
8.6	Hyperbolische Funktionen	159
8.7	Die logarithmische Spirale	160
8.8	Drei Dimensionen	162

9.	<i>Komplexe Zahlen</i>	
9.1	Rationale Zahlen	172
9.2	Reelle Zahlen	174
9.3	Das Argand-Diagramm ..	175
9.4	Modul und Argument ..	178
9.5	Die Formel $e^{\pi i} + 1 = 0$..	180
9.6	Wurzeln von Gleichungen	181
9.7	Konforme Abbildungen ..	182

Teil

12.	<i>Anordnungsgeometrie</i>	
12.1	Die Ausscheidung zweier verschiedener Geometrien aus Euklid	214
12.2	Die Zwischenbeziehung ..	216
12.3	Die Aufgabe von Sylvester über kollineare Punkte	221
12.4	Ebenen und Hyperebenen	223
12.5	Stetigkeit	228
12.6	Parallelität	229

13.	<i>Affine Geometrie</i>	
13.1	Das Parallelenaxiom und das Axiom von Desargues	233

7.4	Das Produkt von drei Spiegelungen	131
7.5	Die Schraubung	133
7.6	Die Drehstreckung	134
7.7	Kugelerhaltende Transformationen	138

II

10.	<i>Die fünf Platonischen Körper</i>	
10.1	Pyramiden, Prismen und Antiprismen	186
10.2	Risse und Modelle	189
10.3	Die Formel von Euler	191
10.4	Radien und Winkel	194
10.5	Reziproke Polyeder	197
11.	<i>Goldener Schnitt und Phyllotaxis</i>	
11.1	Die Teilung nach dem Extremen und dem Mittleren	199
11.2	De divina proportione	201
11.3	Die goldene Spirale	203
11.4	Die Fibonacci Zahlen	205
11.5	Phyllotaxis	209

III

13.2	Streckungen	236
13.3	Affine Koordinaten	242
13.4	Die Fläche	247
13.5	Zweidimensionale Gitter	253
13.6	Vektoren und Schwerpunkte	258
13.7	Baryzentrische Koordinaten	262
13.8	Der affine Raum	269
13.9	Dreidimensionale Gitter	272
14.	<i>Projektive Geometrie</i>	
14.1	Die Axiome der allgemeinen projektiven Ebene	279
14.2	Projektive Koordinaten	284
14.3	Der Satz von Desargues	289

14.4	Viereck und harmonische Beziehung	291
14.5	Projektivität	294
14.6	Kollineationen und Korrelationen	300
14.7	Der Kegelschnitt	306
14.8	Der projektive Raum	310
14.9	Der Euklidische Raum	317

15. *Absolute Geometrie*

15.1	Kongruenz	320
15.2	Parallelismus	322
15.3	Bewegung	326
15.4	Endliche Drehgruppen	329
15.5	Endliche Gruppen von Bewegungen	336
15.6	Geometrische Kristallographie	338
15.7	Das Polyeder-Kaleidoskop	340

Teil

17. *Differentialgeometrie der Kurven*

17.1	Vektoren im Euklidischen Raum	370
17.2	Vektorfunktionen und ihre Ableitungen	376
17.3	Krümmung, Evoluten und Evolventen	377
17.4	Die Kettenlinie	382
17.5	Die Traktrix	385
17.6	Die Raumkurven	386
17.7	Die gemeine Schraubenlinie	389
17.8	Die allgemeine Schraubenlinie	391
17.9	Die Schneckenlinie	393

18. *Tensoren*

18.1	Die duale Basis	395
18.2	Der Fundamentaltensor	396
18.3	Reziproke Gitter	399
18.4	Das kritische Gitter einer Kugel	403
18.5	Allgemeine Koordinaten	406
18.6	Das alternierende Symbol	410

15.8	Durch Inversionen erzeugte diskrete Gruppen	343
16.	<i>Hyperbolische Geometrie</i>	
16.1	Euklidisches und hyperbolisches Parallelenaxiom	349
16.2	Die Frage der Widerspruchsfreiheit	350
16.3	Der Parallelenwinkel ..	354
16.4	Die Endlichkeit der Dreiecke	359
16.5	Fläche und Winkeldefekt	360
16.6	Kreise, Horozykeln und äquidistante Kurven ..	364
16.7	Poincaré's «Halbebenen»-Modell	367
16.8	Die Horosphäre und die Euklidische Ebene	368

IV

19.	<i>Differentialgeometrie der Flächen</i>	
19.1	Die Verwendung zweier Parameter auf der Fläche	412
19.2	Richtungen auf einer Fläche	416
19.3	Normalkrümmung	420
19.4	Die Hauptkrümmungen	423
19.5	Hauptkrümmungsrichtungen und Krümmungslinien	428
19.6	Nabelpunkte	432
19.7	Die Sätze von Dupin und Liouville	433
19.8	Die Indikatrix von Dupin	436
20.	<i>Geodätische Linien</i>	
20.1	Theorema egregium	439
20.2	Die Differentialgleichungen für die geodätischen Linien	424
20.3	Die Gesamtkrümmung eines geodätischen Dreiecks	445

20.4	Die Charakteristik von Euler-Poincaré	447
20.5	Flächen konstanter Krümmung	448
20.6	Der Parallelenwinkel ..	449
20.7	Die Pseudosphäre	451
21.	<i>Topologie der Flächen</i>	
21.1	Orientierbare Flächen ..	455
21.2	Nicht orientierbare Flächen	458
21.3	Regelmäßige Karten ..	462
21.4	Das Vierfarbenproblem ..	467
21.5	Der Sechsfarbensatz	469
21.6	Hinreichende Anzahl von Farben für jede Fläche ..	472
21.7	Flächen, die die volle Anzahl von Farben benötigen	473

TA

.

- I Die Gruppe pg , erzeugt durch z
- II Die Gruppe cm , erzeugt durch ein Gleitspiegelung
- III Ein Drahtmodell des regulären
- IV Dichte Kreispackungen in der E

22. *Vierdimensionale Geometrie*

22.1	Die einfachsten vierdimensionalen Figuren ..	475
22.2	Eine notwendige Bedingung für $\{p, q, r\}$	477
22.3	Konstruktion der regulären Polytope	479
22.4	Dichte Packungen gleicher Kugeln	484
22.5	Eine statistische Honigwabe	492
	Tabellen	494
	Literaturverzeichnis	496
	Antworten zu den Übungen ..	501
	Register	541

TAFELN

Zwei parallele Gleitspiegelungen	81
Eine Spiegelung und eine parallele	82
120-Zells $\{5, 3, 3\}$	483
euklidischen Ebene	485