

Inhalt

- 1. Zahlen und Räume 22**
 - 1.1. Reelle Zahlen 22**
 - 1.1.1. Zahlssysteme 22
 - 1.1.2. Abstand und Vollständigkeitsaxiom 23
 - 1.2. Komplexe Zahlen 23**
 - 1.2.1. Definitionen 23
 - 1.2.2. Eigenschaften 24
 - 1.2.3. Konjugierte Elemente, Subtraktion und Division 24
 - 1.2.4. Normaldarstellung 25
 - 1.3. \mathbf{R}_n , \mathbf{C}_n und metrische Räume 26**
 - 1.3.1. Der n -dimensionale reelle Raum \mathbf{R}_n 26
 - 1.3.2. Der n -dimensionale komplexe Raum \mathbf{C}_n 26
 - 1.3.3. Der metrische Raum 27
- 2. Konvergenz und Stetigkeit 28**
 - 2.1. Folgen 28**
 - 2.1.1. Infimum, Supremum und Limes 28
 - 2.1.2. Eigenschaften konvergenter Folgen 29
 - 2.1.3. Beispiele 29
 - 2.2. Reihen 30**
 - 2.2.1. Konvergenz und Divergenz 30
 - 2.2.2. Beispiele 31
 - 2.2.3. Konvergenzkriterien 31
 - 2.2.4. Umordnungen, Multiplikationen und Additionen 32
 - 2.3. Reelle Funktionen im \mathbf{R}_1 33**
 - 2.3.1. Definition 33
 - 2.3.2. Eigenschaften stetiger Funktionen 35
 - 2.4. Stetige Abbildungen in metrischen Räumen 36**
 - 2.4.1. Definition 36
 - 2.4.2. Beispiele 36
 - 2.4.3. Reelle stetige Funktionen im \mathbf{R}_n 37
 - 2.5. Vollständige metrische Räume 38**
 - 2.5.1. Definitionen 38
 - 2.5.2. Der Raum $C[a, b]$ 38
 - 2.5.3. Der Banachsche Fixpunktsatz 39
- 3. Differential- und Integralrechnung im \mathbf{R}_1 (Grundbegriffe) 40**
 - 3.1. Differentiation 40**
 - 3.1.1. Definitionen 40
 - 3.1.2. Regeln 41

- 3.1.3. Beispiele (Rationale Funktionen) 41
- 3.1.4. Umkehrfunktionen 42
- 3.1.5. Mittelwertsätze 42
- 3.1.6. Ableitungen höherer Ordnung, Ableitungen komplexer Funktionen 43
- 3.2. Integration reeller Funktionen 44**
 - 3.2.1. Definition des Riemannsches Integrals 44
 - 3.2.2. Eigenschaften 45
 - 3.2.3. Vertauschbarkeit von Limes und Integration 45
 - 3.2.4. Beispiele und Gegenbeispiele integrierbarer Funktionen 46
 - 3.2.5. Stammfunktionen 46
 - 3.2.6. Integraloperatoren 47
- 4. Gewöhnliche Differentialgleichungen (Existenz- und Unitätssätze) 49**
 - 4.1. Anfangswertprobleme 49**
 - 4.1.1. Die Differentialgleichung $f^{(n)}(x) \equiv 0$ 49
 - 4.1.2. Problemstellung 49
 - 4.2. Existenz- und Unitätssätze 50**
 - 4.2.1. Systeme erster Ordnung 50
 - 4.2.2. Differentialgleichungen n -ter Ordnung 50
 - 4.2.3. Lokale Existenz- und Unitätssätze 51
- 5. Elementare Funktionen und Potenzreihen 51**
 - 5.1. Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen (reell) 51**
 - 5.1.1. Die Funktion e^x 51
 - 5.1.2. Die Funktion $\log x$ 52
 - 5.1.3. Die Zahl e 53
 - 5.1.4. Die Funktionen a^x und $\log_a x$ 53
 - 5.1.5. Die Funktion x^x 53
 - 5.2. Trigonometrische Funktionen 54**
 - 5.2.1. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ 54
 - 5.2.2. Die Funktionen $\tan x$ und $\cot x$ 55
 - 5.2.3. Die Funktionen $\arcsin x$ und $\arctan x$ 55
 - 5.2.4. Die Funktion $e^{i\varphi}$ 56
 - 5.3. Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen (komplex) 57**
 - 5.3.1. Die Funktionen e^z und $\ln z$ 57
 - 5.3.2. Die Funktion z^w , Riemannsche Flächen 58
 - 5.3.3. Einheitswurzeln, Fundamentalsatz der Algebra 58
 - 5.4. Potenzreihen 60**
 - 5.4.1. Konvergenzradius 60
 - 5.4.2. Addition und Multiplikation von Potenzreihen 60
 - 5.4.3. Differentiation von Funktionenfolgen und Potenzreihen 61
 - 5.4.4. Taylorreihen 61
 - 5.4.5. Beispiele und Gegenbeispiele für Taylorreihen 62
 - 5.4.6. Potenzreihe für e^z , analytische Funktionen 63
 - 5.4.7. Irrationalität von e 63
- 6. Banachräume 64**
 - 6.1. Definitionen und Beispiele 64**
 - 6.1.1. Definitionen 64
 - 6.1.2. Beispiele 65

- 6.2. Räume vom Typ l_p 65**
 - 6.2.1. Ungleichungen 65
 - 6.2.2. Die Räume $l_{p,R}^n$, $l_{p,C}^n$, $l_{p,R}$ und $l_{p,C}$ 65
- 7. Integralrechnung im R_1 (Fortsetzung) 67**
 - 7.1. Klassen integrierbarer Funktionen 67**
 - 7.1.1. Allgemeine Regeln (partielle Integration, Variablensubstitution) 67
 - 7.1.2. Integration rationaler Funktionen, Partialbruchzerlegung 68
 - 7.1.3. Integration von $R(\cos x, \sin x)$ 69
 - 7.1.4. Integration von $R(e^x)$, $R(x, \sqrt{x^2-1})$ und $R(x, \sqrt{x^2+1})$ 70
 - 7.1.5. Integration von $R(x, \sqrt{1-x^2})$ 70
 - 7.1.6. Integration von $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ 70
 - 7.2. Uneigentliche Integrale 71**
 - 7.2.1. Typen uneigentlicher Integrale, Beispiele 71
 - 7.2.2. Integralkriterium für Reihen, Euler-Mascheronische Zahl 72
 - 7.2.3. Die Γ -Funktion 73
- 8. Differentialrechnung im R_n 73**
 - 8.1. Partielle Ableitungen 73**
 - 8.1.1. Definition 73
 - 8.1.2. Vertauschbarkeit partieller Ableitungen 74
 - 8.1.3. Taylorpolynome 75
 - 8.1.4. n -dimensionale Potenzreihen 75
 - 8.1.5. Kurven und Flächen im R_n . Kettenregel 76
 - 8.1.6. Geometrische Interpretation des Taylorpolynoms 78
 - 8.1.7. Richtungsableitung 78
 - 8.2. Implizite Funktionen und Auflösungssätze 79**
 - 8.2.1. Problemstellung 79
 - 8.2.2. Auflösungssatz, krummlinige Koordinaten 80
 - 8.2.3. Parameterabhängiger Auflösungssatz 81
 - 8.2.4. Implizite Funktionen 81
 - 8.3. Extremwerte von Funktionen 82**
 - 8.3.1. Der eindimensionale Fall 82
 - 8.3.2. Der n -dimensionale Fall 82
- 9. Integralrechnung im R_n 83**
 - 9.1. Definitionen und Eigenschaften 83**
 - 9.1.1. Q -Gebiete und I -Gebiete 83
 - 9.1.2. Integrale in Q -Gebieten 84
 - 9.1.3. Eigenschaften 85
 - 9.1.4. Integrierbare Funktionen 85
 - 9.1.5. Integrale in I -Gebieten 85
 - 9.1.6. Iterationssatz für n -dimensionale Integrale 86
 - 9.2. Transformationsformeln, Volumenmessung, Flächenmessung 86**
 - 9.2.1. Volumenmessung 86
 - 9.2.2. Transformationsformeln 87

- 9.2.3. Bogenlänge von Kurven 87
- 9.2.4. Flächenmessung 88
- 9.2.5. Flächenintegrale 89
- 9.2.6. Die Einheitskugel, $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ 89
- 9.2.7. Uneigentliche Integrale 90
- 9.3. Integralsätze 91**
- 9.3.1. Der Gaußsche Satz 91
- 9.3.2. Die Greenschen Sätze 92
- 10. Gewöhnliche Differentialgleichungen (Lösungsmethoden) 93**
- 10.1. Trennbare, homogene und exakte Differentialgleichungen 93**
- 10.1.1. Problemstellung 93
- 10.1.2. Trennbare Differentialgleichungen 93
- 10.1.3. Homogene Differentialgleichungen 94
- 10.1.4. Exakte Differentialgleichungen 95
- 10.1.5. Der integrierende Faktor 96
- 10.2. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung 96**
- 10.2.1. Die Gleichung $y' = f(x) y$ 96
- 10.2.2. Die inhomogene lineare Differentialgleichung 97
- 10.3. Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung 97**
- 10.3.1. Fundamentalsysteme und Wronskideterminante 97
- 10.3.2. Inhomogene Differentialgleichungssysteme 99
- 10.3.3. Spezielle Differentialgleichungssysteme 99
- 10.3.4. Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten 100
- 10.4. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung 100**
- 10.4.1. Problemstellung 100
- 10.4.2. Fundamentalsysteme und Wronskideterminante 101
- 10.4.3. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 102
- 10.5. Stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten 102**
- 10.5.1. Differentialgleichungssysteme erster Ordnung 102
- 10.5.2. Differentialgleichungen n -ter Ordnung 103
- 10.5.3. Stetige Abhängigkeit von der rechten Seite 103
- 11. Variationsrechnung 104**
- 11.1. Die Grundgleichungen der Variationsrechnung 104**
- 11.1.1. Problemstellung 104
- 11.1.2. Vorbereitungen 105
- 11.1.3. Die Eulerschen Gleichungen 105
- 11.2. Beispiele 106**
- 11.2.1. Eine physikalische Vorbemerkung 106
- 11.2.2. Die Brachistochrone 107
- 11.2.3. Das Problem von der Geraden als kürzeste Verbindung zweier Punkte 108
- 11.2.4. Rotationssymmetrische Minimalflächen 109
- 12. Prinzipien der klassischen Mechanik 110**
- 12.1. Modellbildung in der Physik 110**
- 12.1.1. Zum Verhältnis von Mathematik und Physik 110
- 12.1.2. Mathematische Modelle 111

- 12.1.3. Kriterien für Modelle 112
- 12.1.4. Ein Beispiel 113
- 12.2. Das Modell für die Punktmechanik 113**
 - 12.2.1. Das Hamiltonprinzip 113
 - 12.2.2. Ein Beispiel (Freier Fall) 114
 - 12.2.3. Das erste Integral 114
- 12.3. Systeme von n Massenpunkten 114**
 - 12.3.1. Das Grundmodell 114
 - 12.3.2. Kräftefreie Systeme 115
 - 12.3.3. Konservative Systeme 115
 - 12.3.4. Teilchen im Potentialtopf, harmonischer Oszillator 116
- 12.4. Planetenbewegung 117**
 - 12.4.1. Problemstellung und Grundmodell 117
 - 12.4.2. Ebene Bahnen, zweites Keplersches Gesetz 119
 - 12.4.3. Erstes Keplersches Gesetz 119
 - 12.4.4. Drittes Keplersches Gesetz 120
- 13. Maßtheorie 121**
 - 13.1. Mengensysteme 121**
 - 13.1.1. Algebren und σ -Algebren 121
 - 13.1.2. Erweiterungssätze 122
 - 13.1.3. Borelmengen im R_n 122
 - 13.2. Elementarmaße und Maße 123**
 - 13.2.1. Definitionen 123
 - 13.2.2. Eigenschaften 123
 - 13.2.3. Überdeckungssatz von Heine-Borel 124
 - 13.2.4. Borelsche Elementarmaße im R_1 125
 - 13.2.5. Lebesguesches Elementarmaß im R_n 126
 - 13.3. Das äußere Maß, Fortsetzung von Elementarmaßen 126**
 - 13.3.1. Das äußere Maß 127
 - 13.3.2. Das induzierte Maß 127
 - 13.3.3. Der Fortsetzungssatz 128
 - 13.3.4. Borelsche, Lebesguesche und Diracsche Maße 129
 - 13.3.5. Unitätssätze 129
 - 13.4. Meßbare Funktionen 129**
 - 13.4.1. Definition 129
 - 13.4.2. Eigenschaften meßbarer Funktionen 130
 - 13.4.3. Folgen meßbarer Funktionen 131
 - 13.4.4. Konvergenz fast überall, Maßkonvergenz 132
- 14. Integrationstheorie 134**
 - 14.1. Integrierbare Funktionen, Eigenschaften von Integralen 134**
 - 14.1.1. Integrierbare einfache Funktionen 134
 - 14.1.2. Integrierbare Funktionen 135
 - 14.1.3. Eigenschaften integrierbarer Funktionen 135
 - 14.1.4. Eigenschaften von Integralen 136
 - 14.2. Die Hauptsätze der Integrationstheorie 136**
 - 14.2.1. Die L_1 -Konvergenz 136
 - 14.2.2. Der Satz von Lebesgue 137

-
- 14.2.3. Weitere Eigenschaften integrierbarer Funktionen 137
 - 14.2.4. Der Banachraum $L_1(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 138
 - 14.2.5. Die Sätze von B. Levi und Fatou 139
 - 14.3. Transformationsformeln 139**
 - 14.3.1. Meßbare Abbildungen und Bildmaße 139
 - 14.3.2. Eine spezielle Transformationsformel 140
 - 14.3.3. Absolut-stetige Maße, der Satz von Radon-Nikodym 140
 - 14.3.4. Die allgemeine Transformationsformel 140
 - 14.4. Produktmaße, Satz von Fubini 141**
 - 14.4.1. Die σ -Algebra im Produktraum, meßbare Schnitte 141
 - 14.4.2. Das Produktmaß 141
 - 14.4.3. Der Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen 142
 - 14.4.4. Der Satz von Fubini für beliebige Funktionen 142
 - 14.5. Vergleich zwischen Riemannschen und Lebesgueschen Integralen 142**
 - 14.5.1. Integrierbare Funktionen 142
 - 14.5.2. Die Sätze von Lebesgue und Fubini 143
 - 14.5.3. Transformationsformeln 144
 - 14.6. L_p -Räume 145**
 - 14.6.1. Definition 145
 - 14.6.2. Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski 145
 - 14.6.3. Die Räume $L_p(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 145
 - 14.6.4. Die Räume $L_p(R_n)$ und $L_p(\Omega)$ 146
 - 15. Funktionentheorie 147**
 - 15.1. Holomorphe Funktionen 147**
 - 15.1.1. Die komplexe Ebene C 147
 - 15.1.2. Holomorphe Funktionen 148
 - 15.1.3. Beispiele holomorpher Funktionen 149
 - 15.1.4. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, harmonische Funktionen 149
 - 15.2. Integralsätze 151**
 - 15.2.1. Komplexe Kurvenintegrale 151
 - 15.2.2. Der Cauchysche Integralsatz 152
 - 15.2.3. Die Cauchysche Integralformel 154
 - 15.3. Eigenschaften holomorpher Funktionen 155**
 - 15.3.1. Differenzierbarkeit und Ableitungsformeln 155
 - 15.3.2. Taylorreihen 155
 - 15.3.3. Der Identitätssatz 156
 - 15.3.4. Das Maximumprinzip 156
 - 15.3.5. Der Satz von Liouville 157
 - 15.3.6. Der Fundamentalsatz der Algebra 157
 - 15.4. Singularitätentheorie 157**
 - 15.4.1. Laurentreihen 157
 - 15.4.2. Singularitäten 158
 - 15.4.3. Systematische Funktionentheorie, rationale Funktionen 159
 - 15.5. Residuentheorie 159**
 - 15.5.1. Der Residuensatz 159
 - 15.5.2. Das logarithmische Residuum 160
 - 15.5.3. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen 161
 - 15.5.4. Umkehrfunktionen 162

-
- 15.6. Holomorphe Fortsetzung 162**
 - 15.6.1. Das Kreiskettenverfahren 162
 - 15.6.2. Der Monodromiesatz 163
 - 15.6.3. Riemannsche Flächen 163
 - 15.7. Konforme Abbildungen 164**
 - 15.7.1. Grundeigenschaften 164
 - 15.7.2. Der Riemannsche Abbildungssatz 165
 - 15.8. Lineare Transformationen 166**
 - 15.8.1. Konforme Abbildungen von G und C_1 166
 - 15.8.2. Die Gruppe der linearen Transformationen 166
 - 15.8.3. Kreisinvarianz 167
 - 15.8.4. Abbildungseigenschaften und Doppelverhältnis 167
 - 15.8.5. Fixpunkte und Abbildungstypen 167
 - 15.8.6. Das Spiegelungsprinzip 169
 - 15.8.7. Konforme Abbildungen des Einheitskreises 169
 - 15.9. Spezielle Funktionen 169**
 - 15.9.1. Die Funktionen e^z und $\ln z$ 169
 - 15.9.2. Die Funktionen $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$ und $\cot z$ 170
 - 15.9.3. Partialbruchzerlegung für $\cot z$ 171
 - 16. Prinzipien der Hydrodynamik ebener Strömungen 172**
 - 16.1. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik 172**
 - 16.1.1. Vorbemerkungen zur Modellbildung 172
 - 16.1.2. Quellenfreie und zirkulationsfreie Strömungen 172
 - 16.1.3. Reelle und komplexe Grundgleichungen 173
 - 16.1.4. Das mathematische Modell 174
 - 16.2. Strömungen 175**
 - 16.2.1. Staupunkt- und Multipolströmungen 175
 - 16.2.2. Strudelströmungen 176
 - 16.2.3. Profilströmungen 177
 - 16.2.4. Konforme Abbildungen in der Hydrodynamik und Žukovskij-Profile 178
 - 17. Elemente der Geometrie 180**
 - 17.1. Die Geometrie der Raumkurven im R_3 180**
 - 17.1.1. Das begleitende Dreibein 180
 - 17.1.2. Die Frenetschen Formeln 181
 - 17.1.3. Ebene Kurven 182
 - 17.1.4. Existenz- und Unitätssatz 182
 - 17.2. Die hyperbolische Geometrie 182**
 - 17.2.1. Grundprinzipien axiomatischer Geometrien 182
 - 17.2.2. Ein Modell der hyperbolischen Geometrie 183
 - 17.2.3. Längen, Winkel und Dreiecke 184
 - 17.2.4. Kreise 185
 - 17.2.5. Bogenlänge und Flächeninhalt 185
 - 17.2.6. Flächeninhalt von Dreiecken 186
 - 17.3. Die Geometrie des Hilbertraumes 186**
 - 17.3.1. Hilberträume 186
 - 17.3.2. Beispiele von Hilberträumen 187

-
- 17.3.3. Orthogonalsysteme 188
 - 17.3.4. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren 189
 - 17.3.5. Orthogonalzerlegungen 189
 - 18. Orthogonalreihen 191**
 - 18.1. n -dimensionale trigonometrische Funktionen 191**
 - 18.1.1. Orthonormierte Systeme 191
 - 18.1.2. Fourierkoeffizienten und absolute Konvergenz 192
 - 18.1.3. Periodische trigonometrische Reihen in $L_2(Q)$ 193
 - 18.1.4. Halbperiodische trigonometrische Reihen in $L_2(Q)$ 194
 - 18.1.5. Ein Beispiel 194
 - 18.2. Orthogonale Polynome 195**
 - 18.2.1. Approximationssätze 195
 - 18.2.2. Legendresche Polynome 196
 - 19. Partielle Differentialgleichungen 196**
 - 19.1. Typen partieller Differentialgleichungen und physikalische Beispiele 196**
 - 19.1.1. Typen 196
 - 19.1.2. Physikalische Beispiele 197
 - 19.2. Die Laplace-Poisson-Gleichung 198**
 - 19.2.1. Grundlösungen und Integraldarstellungen 198
 - 19.2.2. Greensche Funktionen 199
 - 19.2.3. Eigenschaften harmonischer Funktionen 200
 - 19.2.4. Das Dirichletsche Randwertproblem 201
 - 19.2.5. Die Poisson-Gleichung 202
 - 19.3. Die Wellengleichung 202**
 - 19.3.1. Unitätssätze 202
 - 19.3.2. Die Wellengleichung in einer Dimension 204
 - 19.3.3. Anfangswertprobleme für die Wellengleichung in zwei und drei Dimensionen 205
 - 19.3.4. Physikalische Interpretationen, Huygenssche Eigenschaft, Kugelwellen 206
 - 19.3.5. Die inhomogene Wellengleichung, retardierte Potentiale 207
 - 19.4. Die Wärmeleitungsgleichung 208**
 - 19.4.1. Die Singularitätenlösung 208
 - 19.4.2. Das Maximum-Minimum-Prinzip 209
 - 19.4.3. Das Anfangswertproblem 209
 - 19.5. Separationsansätze 210**
 - 19.5.1. Vorbemerkung 210
 - 19.5.2. Die eingespannte belastete Platte 210
 - 19.5.3. Der Separationsansatz für die Laplace-Gleichung 211
 - 19.5.4. Die Fouriersche Methode für die Wellengleichung 212
 - 19.5.5. Die schwingende Membran, die schwingende Saite 213
 - 19.5.6. Die Fouriersche Methode für die Wärmeleitungsgleichung 214
 - 20. Operatoren in Banachräumen 215**
 - 20.1. Banachräume 215**
 - 20.1.1. Separable Banachräume 215
 - 20.1.2. Spezielle Mengen in Banachräumen 215
 - 20.1.3. Der Raum $C(\bar{\Omega})$ 216

- 20.1.4. Endlichdimensionale Banachräume 216
- 20.1.5. Vervollständigung normierter Räume 217
- 20.2. Operatoren 218**
 - 20.2.1. Grundbegriffe 218
 - 20.2.2. Der Raum $L(B_1, B_2)$ 218
 - 20.2.3. Das Spektrum und Resolventen 219
 - 20.2.4. Der Raum $(l_p)'$ 220
 - 20.2.5. Integraloperatoren 220
- 21. Operatoren in Hilberträumen 221**
 - 21.1. Klassen stetiger Operatoren 221**
 - 21.1.1. Isomorphie von Hilberträumen 221
 - 21.1.2. Lineare Funktionale 222
 - 21.1.3. Bilinearformen 222
 - 21.1.4. Adjungierte Operatoren 222
 - 21.1.5. Projektionsoperatoren 223
 - 21.1.6. Isometrische und unitäre Operatoren 223
 - 21.1.7. Kompakte und ausgeartete Operatoren 223
 - 21.2. Die Theorie von Riesz und Schauder 224**
 - 21.2.1. Problemstellung 224
 - 21.2.2. Zerlegungssätze 224
 - 21.2.3. Das Spektrum kompakter Operatoren 225
 - 21.3. Fredholmsche Integralgleichungen 225**
 - 21.3.1. Der adjungierte Integraloperator 225
 - 21.3.2. Die Fredholmschen Alternativsätze 226
- 22. Distributionen 227**
 - 22.1. Grundbegriffe 227**
 - 22.1.1. Einleitung 227
 - 22.1.2. Die Räume $D(\Omega)$ und $D'(\Omega)$ 228
 - 22.1.3. Beispiele von Distributionen 228
 - 22.1.4. Operationen mit Distributionen 229
 - 22.1.5. Der Raum $E'(\Omega)$ 231
 - 22.2. Die Fouriertransformation und die Räume $S(\mathbf{R}_n)$ und $S'(\mathbf{R}_n)$ 232**
 - 22.2.1. Der Raum $S(\mathbf{R}_n)$ und die Fouriertransformation 232
 - 22.2.2. Eigenschaften der Fouriertransformation 232
 - 22.2.3. Der Raum $S'(\mathbf{R}_n)$ 233
 - 22.2.4. Die Fouriertransformation in $S'(\mathbf{R}_n)$ 234
 - 22.2.5. Weitere Eigenschaften von Fouriertransformationen 234
 - 22.3. Tensorprodukte und Faltungen 235**
 - 22.3.1. Tensorprodukte 235
 - 22.3.2. Eigenschaften von Tensorprodukten 236
 - 22.3.3. Faltungen 236
 - 22.3.4. Eigenschaften von Faltungen 236
- 23. Partielle Differentialgleichungen und Distributionen 238**
 - 23.1. Fundamentallösungen 238**
 - 23.1.1. Grundeigenschaften 238
 - 23.1.2. Die Laplace-Gleichung 239

- 23.1.3. Die Wärmeleitungsgleichung 239
- 23.1.4. Die Wellengleichung 240
- 23.2. Anfangswertprobleme 241**
- 23.2.1. Problemstellung 241
- 23.2.2. Die Wellengleichung 243
- 23.2.3. Die Wärmeleitungsgleichung 243

- 24. Grundbegriffe der klassischen Feldtheorie 244**
- 24.1. Tensoren 244**
- 24.1.1. Vorbemerkung 244
- 24.1.2. Der Fundamentaltensor 245
- 24.1.3. Tensoren 247
- 24.1.4. Eigenschaften von Tensoren 249
- 24.1.5. Metrische Geodäten 249
- 24.2. Klassische Feldtheorie 251**
- 24.2.1. Das Modell der Feldtheorie 251
- 24.2.2. Lagrange-Dichten 251
- 24.2.3. Lagrange-Formalismus 253
- 24.3. Beispiele für Feldtheorien 255**
- 24.3.1. Die kovariante Punktmechanik 255
- 24.3.2. Die Maxwell-Lorentz-Gleichungen der Elektrodynamik 257
- 24.3.3. Interpretation und Umschrift der Maxwellschen Gleichungen 258

- 25. Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie und der Elektrodynamik 260**
- 25.1. Die Lorentz-Gruppe und die Raum-Zeit 260**
- 25.1.1. Der Minkowskiraum und Inertialsysteme 260
- 25.1.2. Weltlinien 262
- 25.1.3. Die Lorentz-Gruppe 263
- 25.1.4. Spezielle Transformationen der eigentlichen Lorentz-Gruppe 264
- 25.1.5. Die Raum-Zeit (physikalische Aspekte) 265
- 25.1.6. Die Raum-Zeit (mathematische Aspekte) 266
- 25.2. Effekte der speziellen Relativitätstheorie 268**
- 25.2.1. Die Zeitdilatation und das Zwillingsparadoxon 268
- 25.2.2. Die Lorentz-Kontraktion 270
- 25.2.3. Das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten 271
- 25.2.4. Das freie relativistische Teilchen 271
- 25.2.5. Eigenzeit, Masse und Energie 272
- 25.3. Die Maxwellschen Gleichungen 272**
- 25.3.1. Problemstellung 272
- 25.3.2. Anfangswertprobleme 273

- 26. Selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum 274**
- 26.1. Unbeschränkte Operatoren 274**
- 26.1.1. Abgeschlossene Operatoren 274
- 26.1.2. Abschließbare Operatoren 275
- 26.1.3. Adjungierte Operatoren 275
- 26.1.4. Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren 276
- 26.1.5. Kriterien für die Selbstadjungiertheit von Operatoren 276

- 26.2. Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren 277**
 - 26.2.1. Die Spektren \tilde{D}_A und \tilde{C}_A 277
 - 26.2.2. Die Spektren D_A und C_A 278
 - 26.2.3. Kompakte selbstadjungierte Operatoren 279
- 26.3. Spektralscharen 279**
 - 26.3.1. Definitionen 279
 - 26.3.2. Eigenschaften 280
- 26.4. Spektraloperatoren 280**
 - 26.4.1. Riemann-Stieltjes Integrale für Funktionen 280
 - 26.4.2. Riemann-Stieltjes Integrale für Spektralscharen auf endlichen Intervallen 281
 - 26.4.3. Riemann-Stieltjes Integrale für Spektralscharen auf R_1 282
 - 26.4.4. Spektraloperatoren 282
 - 26.4.5. Der Hauptsatz der Spektraltheorie 283
 - 26.4.6. Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren 284
 - 26.4.7. Operatoren mit reinem Punktspektrum 284
- 27. Differentialoperatoren und orthogonale Funktionen 285**
 - 27.1. Klassische orthogonale Funktionen 285**
 - 27.1.1. Vorbemerkung 285
 - 27.1.2. Trigonometrische Funktionen 285
 - 27.1.3. Hermitesche Funktionen 286
 - 27.1.4. Legendresche Funktionen 287
 - 27.1.5. Laguerresche Funktionen 288
 - 27.2. Kugelflächenfunktionen 288**
 - 27.2.1. Der Beltramische Differentialoperator 288
 - 27.2.2. Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen 290
 - 27.2.3. Dreidimensionale Kugelflächenfunktionen 290
- 28. Prinzipien der Quantenmechanik 291**
 - 28.1. Axiomatik der Quantenmechanik 291**
 - 28.1.1. Das Hilbertraum-Modell 291
 - 28.1.2. Die Dynamik quantenmechanischer Systeme 292
 - 28.1.3. Stationäre Zustände 293
 - 28.2. Interpretationen 293**
 - 28.2.1. Das Bohrsche Postulat 293
 - 28.2.2. Die statistische Interpretation der Quantenmechanik 294
 - 28.2.3. Die Heisenbergsche Unschärferelation 295
 - 28.3. Quantisierung 296**
 - 28.3.1. Die Quantisierungsregel 296
 - 28.3.2. Beispiele zur Quantisierung 297
 - 28.4. Ein-Teilchen-Probleme 299**
 - 28.4.1. Das freie eindimensionale Teilchen 299
 - 28.4.2. Der harmonische Oszillator 299
 - 28.4.3. Das relativistische freie Teilchen im R_3 300
 - 28.5. Das Wasserstoffatom 302**
 - 28.5.1. Das Wasserstoffatom ohne Spin 302
 - 28.5.2. Der Zeeman-Effekt 304

- 28.5.3. Das Wasserstoffatom mit Spin 305
 28.5.4. Das relativistische Wasserstoffatom 307
- 28.6. Atome und das Periodensystem der chemischen Elemente 308**
- 28.6.1. Atome ohne Spin 308
 28.6.2. Der Raum $L_{2,4}^n(\mathbb{R}_{3n})$ 309
 28.6.3. Atome mit Spin 310
 28.6.4. Das Pauli-Prinzip 311
 28.6.5. Das Periodensystem der chemischen Elemente 313
- 29. Geometrie auf Mannigfaltigkeiten I (Tensoren) 314**
- 29.1. Mannigfaltigkeiten 314**
- 29.1.1. Der parakompakte Hausdorffraum 314
 29.1.2. C^∞ -Mannigfaltigkeiten 315
 29.1.3. Funktionen auf C^∞ -Mannigfaltigkeiten 316
- 29.2. Geometrische Objekte 317**
- 29.2.1. Faserbündel 317
 29.2.2. Tensordichten 318
- 29.3. Tensoranalysis 319**
- 29.3.1. Grundoperationen für Tensordichten 319
 29.3.2. Differentielle Operationen 319
 29.3.3. Integrale auf Mannigfaltigkeiten 320
- 29.4. Affine Räume 320**
- 29.4.1. Affinitäten 320
 29.4.2. Normale Koordinaten 321
 29.4.3. Kovariante Differentiation 321
 29.4.4. Parallelverschiebung 322
 29.4.5. Affine Geodäten 323
 29.4.6. Krümmungstensor 323
 29.4.7. Fläche affine Räume 324
- 29.5. Metrische Räume 324**
- 29.5.1. Fundamentaltensor 324
 29.5.2. Indexziehen 326
 29.5.3. Charakteristische Flächen 326
 29.5.4. Metrische Geodäten 327
 29.5.5. Geodätisch konvexe Gebiete 328
 29.5.6. Metrische Räume 328
 29.5.7. Krümmungstensor und verwandte Tensoren 329
- 30. Allgemeine Relativitätstheorie I (Grundgleichungen) 330**
- 30.1. Extremalprinzipien 330**
- 30.1.1. Lagrange-Formalismus 330
 30.1.2. Die Einsteinschen Gleichungen 330
 30.1.3. Die Einstein-Maxwell-Gleichungen 331
 30.1.4. Äußerungen Einsteins zur Relativitätstheorie und zur Quantentheorie 333
- 30.2. Der Energie-Impuls-Tensor 335**
- 30.2.1. Killingvektoren und Erhaltungssätze 335
 30.2.2. Das Kovarianzprinzip 336
 30.2.3. Energie-Impuls-Tensor für ideale Flüssigkeiten 337
 30.2.4. Vergleich mit der Newtonschen Gravitationstheorie 337

- 30.3. Bewegungsgleichungen 338**
- 30.3.1. Testteilchen und elektromagnetische Wellen 338
- 30.3.2. Eigenzeit und Zwillingsparadoxon 339
- 30.4. Die Schwarzschild-Lösung 339**
- 30.4.1. Das Birkhoff-Theorem 339
- 30.4.2. Die Eddington-Form der Schwarzschild-Lösung 341
- 30.5. Die klassischen Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie 342**
- 30.5.1. Planetenbewegung 342
- 30.5.2. Ablenkung von Lichtstrahlen 344
- 30.5.3. Rotverschiebung im Gravitationsfeld 344
- 31. Allgemeine Relativitätstheorie II (Singularitäten, schwarze Löcher, Kosmologie) 346**
- 31.1. Singuläre Mannigfaltigkeiten 346**
- 31.1.1. Kriterien 346
- 31.1.2. Die Schwarzschild-Eddington-Kruskal-Metrik 347
- 31.1.3. Einschlussflächen 349
- 31.1.4. Singularitäten 350
- 31.1.5. Schwarze Löcher 350
- 31.2. Die Theorie der schwarzen Löcher, Sternentwicklung 352**
- 31.2.1. Die Eddington-Metrik 352
- 31.2.2. Sterne 353
- 31.2.3. Das Hertzsprung-Russell-Diagramm und die himmlische Skala 355
- 31.2.4. Die Kerr-Metrik 356
- 31.2.5. Energiebilanz schwarzer Löcher 358
- 31.3. Kosmologie 359**
- 31.3.1. Prinzipien 359
- 31.3.2. Die Robertson-Walker-Metrik 360
- 31.3.3. Der Staubkosmos 360
- 31.3.4. Das Hubblesche Gesetz 361
- 31.3.5. Lösungen der Friedmanschen Differentialgleichung 362
- 31.3.6. Die Friedmanschen Modelle 362
- 31.3.7. Der Urknall 363
- 31.3.8. Die Entstehung des Lebens im Weltall 363
- 32. Geometrie auf Mannigfaltigkeiten II (Formen) 365**
- 32.1. Tensoren und Differentialformen 365**
- 32.1.1. Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^k}$ und dx^k . Tensorprodukte 365
- 32.1.2. Das alternierende Produkt und das Keilprodukt 366
- 32.1.3. Die äußere Ableitung 368
- 32.1.4. n -Formen 368
- 32.1.5. Der Satz von Poincaré 368
- 32.2. Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten 369**
- 32.2.1. Integrale über n -Formen 369
- 32.2.2. Der de Rham Operator 370
- 32.2.3. Der Satz von Stokes 370
- 32.2.4. Leray-Formen 371

- 32.3. Distributionen auf Mannigfaltigkeiten 372**
 - 32.3.1. Skalare Distributionen 372
 - 32.3.2. Tensordistributionen 374
 - 32.3.3. Kovariante Ableitung und Koableitung von Distributionen 374
 - 32.3.4. Der Wellenoperator 375
 - 32.3.5. Distributionen vom Typ $f(S)$ 376

- 33. Die Wellengleichung in gekrümmten Raum-Zeiten 377**
 - 33.1. Charakteristische Flächen und Singularitäten 377**
 - 33.1.1. Charakteristische Flächen 377
 - 33.1.2. Anfangswertprobleme für charakteristische Flächen und Nullfelder 378
 - 33.1.3. Kaustik 379
 - 33.1.4. Die Kaustik im Minkowskiraum 380
 - 33.1.5. Unstetigkeiten von Lösungen der Wellengleichung und Katastrophen 381
 - 33.2. Fundamentallösungen 382**
 - 33.2.1. Problemstellung 382
 - 33.2.2. Kausalgebiete 383
 - 33.2.3. Die Distribution $\delta_{q^+}(J)$ 384
 - 33.2.4. Fundamentallösungen 385
 - 33.3. Lösungen von $Pu = f$, Cauchyprobleme 385**
 - 33.3.1. Vergangenheits-kompakte Mengen und Distributionen 385
 - 33.3.2. Ein Existenz- und Unitätssatz 386
 - 33.3.3. Das Cauchyproblem: Existenz und Unität 387
 - 33.3.4. Das Cauchyproblem: Darstellung 388
 - 33.4. Tensor-Wellengleichungen 389**
 - 33.4.1. Definitionen 389
 - 33.4.2. Fundamentallösungen 390
 - 33.4.3. Lösungen von $Pu = f$ 391
 - 33.5. Die Maxwellischen Gleichungen 392**
 - 33.5.1. Definition 392
 - 33.5.2. Kontinuitätsgleichung und Cauchy-Daten 392
 - 33.5.3. Eichbedingung und Viererpotential 394
 - 33.5.4. Das Cauchyproblem für die Maxwellischen Gleichungen 395

- 34. Singularitätentheorie 396**
 - 34.1. Lokale Abbildungen 396**
 - 34.1.1. Abbildungskeime, das Ideal $m(n)$ 396
 - 34.1.2. Endlich-determinierte Keime 397
 - 34.1.3. Kriterien für endlich-determinierte Keime 397
 - 34.2. Stabilität 398**
 - 34.2.1. Definitionen 398
 - 34.2.2. Immersionen und Submersionen 400
 - 34.2.3. Globale Sätze 401
 - 34.3. Singularitäten und Morse-Funktionen 402**
 - 34.3.1. Singularitäten 402
 - 34.3.2. Morse-Funktionen 403

-
- 34.4. Abbildungen in der Ebene 404**
 - 34.4.1. Gute und exzellente Abbildungen 404
 - 34.4.2. Normalformen von Faltpunkten und Spitzenpunkten 405
 - 34.4.3. Die Whitney'sche Theorie 405
 - 34.5. Entfaltungen 406**
 - 34.5.1. Definitionen 406
 - 34.5.2. Assoziierte und äquivalente Entfaltungen 406
 - 34.5.3. Stabile und universelle Entfaltungen (Definition und Beispiele) 407
 - 34.5.4. Stabile und universelle Entfaltungen (Kriterien) 408
 - 34.5.5. Reduktion von Entfaltungen 408
 - 34.5.6. Minima 409
 - 34.5.7. Der Satz von Thom 410
 - 35. Katastrophen: Theorie und Anwendung 411**
 - 35.1. Prinzipien und Modelle 411**
 - 35.1.1. Allgemeine Prinzipien und Grundgedanken 411
 - 35.1.2. Das lokale Regime 414
 - 35.1.3. Anwendungsbeispiele 415
 - 35.1.4. Die drei Interpretationen der Katastrophentheorie 417
 - 35.2. Elementare Katastrophen 417**
 - 35.2.1. Der generische Aspekt 417
 - 35.2.2. Bilder elementarer Katastrophen 418
 - 35.3. Anwendungen in der Physik 421**
 - 35.3.1. Die van der Waals'sche Gleichung 421
 - 35.3.2. Eulersche Deformationen 423
 - 35.3.3. Brechung von Wasserwellen 425
 - 35.3.4. Katastrophenmaschinen 425
 - 35.4. Weitere Anwendungen 427**
 - 35.4.1. Taylorreihen und Zellen 427
 - 35.4.2. Anwendungen in der Biologie 428
 - 35.4.3. Hunde und Mathematiker 428
 - Anhang: Über das Verhältnis von Geometrie und Realität im Wandel der Zeiten 429**
 - Ergänzungen 436**
 - Literatur 442**
 - Literaturhinweise 444**
 - Register 445**