

Inhalt

1.	Metrische und lineare normierte Räume	13
1.1.	Einführung	13
1.2.	Konvergenz im metrischen Raum, vollständige Räume	16
1.3.	Beispiele für vollständige metrische Räume	17
1.4.	Kontraktive Abbildungen, Banachscher Fixpunktsatz	20
1.5.	Die Volterrasche Integralgleichung	23
1.6.	Korrekte Aufgaben	25
1.7.	Die stetige Abhängigkeit der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung von den Anfangswerten als korrekte Aufgabe	26
1.8.	Lineare normierte Räume	29
1.9.	Lineare Vektorräume mit Halbnorm	30
1.10.	Normierung eines linearen Vektorraumes mit Halbnorm	30
1.11.	Isometrische lineare Vektorräume, Fortsetzung linearer stetiger Abbildungen	31
1.12.	Vervollständigung linearer normierter Räume (Satz von HAUSDORFF)	33
2.	Topologische Räume	37
2.1.	Einführung	37
2.2.	Grenzwerte und Häufungspunkte	41
2.3.	Stetige Abbildungen topologischer Räume	44
2.4.	Stetigkeit der Halbnorm	47
2.5.	Kompakte topologische Räume	48
2.6.	Prinzipien zur Auswahl der Topologie	52
2.7.	Beispiele für vergleichbare Topologien	53
3.	Funktionale und Minimumprobleme	55
3.1.	Grundproblem	55
3.2.	Kompakte Mengen in $\mathbb{R}^n$ und kompakte Räume stetiger Funktionale	55
3.3.	Das Problem der optimalen Prozeßsteuerung	60
3.4.	Lineare und differenzierbare Funktionale	62
3.5.	Das Minimumproblem für differenzierbare Funktionale	65
3.6.	Ein spezielles Minimumproblem	68
3.7.	Das Sturm-Liouvillesche Randwertproblem	69
3.8.	Isoperimetrische Minimumprobleme	72
3.9.	Minimumprobleme für stark konvexe Funktionale	76
3.10.	Kommentare zu Kapitel 1 bis 3	80

4.	Hilberträume	82
4.1.	Einführung	82
4.2.	Fourierreihen im Hilbertraum	85
4.3.	Separable Räume	90
4.4.	Der universelle Hilbertraum l_2	92
4.5.	Die konvexe Projektion	92
4.6.	Schwache Topologie	97
4.7.	Folgen linearer Funktionale	98
4.8.	Schwache Konvergenz auf einem Hilbertraum	99
5.	Gleichungen und Minimumprobleme auf Hilberträumen	103
5.1.	Konvexe Minimumprobleme	103
5.2.	Das Problem einer überbestimmten Gleichung	107
5.3.	Gleichungen mit monotonen und vollstetigen Potentialoperatoren	108
5.4.	Gleichungen mit stark monotonen Operatoren im Hilbertraum	112
5.5.	Adjungierte und unitäre Operatoren	115
6.	Konstruktive Lösungsverfahren für Minimumprobleme und Gleichungen	116
6.1.	Verfahren	116
6.2.	Das Ritzsche Verfahren	117
6.3.	Das Galerkin-Verfahren	119
6.4.	Projektions-Iterationsverfahren	121
6.5.	Das Gradientenverfahren	123
6.6.	Iterations- und Gradientenverfahren für Gleichungen mit stark monotonem und lipschitzstetigem Operator	124
6.7.	Konvexe Funktionale und Gradientenverfahren	126
7.	Die Anwendung von Fortsetzungs- und Vervollständigungsmethoden	132
7.1.	Ein Fortsetzungssatz und die Fortsetzung positiv definiter Bilinearformen	132
7.2.	Hilberträume mit positiv definiten Bilinearformen	134
7.3.	Operatorgleichung des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems	136
7.4.	Schwache Lösungen des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems	142
7.5.	Einige Funktionenräume	145
7.6.	Kommentare zu Kapitel 4 bis 7	150
8.	Klassifizierung partieller Differentialgleichungen	152
8.1.	Differentialgleichungen	152
8.2.	Algebraische Klassifizierung der quasilinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	153
8.3.	Differentialgleichungen zur Beschreibung materieller Systeme	156
8.4.	Gleichung der schwingenden Saite	158
8.5.	Energetische Betrachtungen	160
8.6.	Membrangleichungen	162
8.7.	Gleichungen der Wärmeausbreitung	166
8.8.	Standardaufgaben	167

9.	Theorie der elliptischen Gleichungen	169
9.1.	Gleichmäßig elliptische lineare Gleichungen in Divergenzform	169
9.2.	Gleichmäßig elliptische quasilineare Gleichungen in Divergenzform	175
9.3.	Konstruktive Lösung des homogenen Randwertproblems für eine quasilineare elliptische Differentialgleichung	177
9.4.	Regularisierung einer linearen elliptischen Differentialgleichung mit Juniorteil	178
9.5.	Das Minimumproblem der Spektraltheorie elliptischer Operatoren	180
9.6.	Konstruktion des Eigenspektrums	182
9.7.	Ein Hauptsatz der Spektraltheorie elliptischer Operatoren	187
9.8.	Operatorfunktionen	190
10.	Lineare parabolische und hyperbolische Gleichungen	193
10.1.	Abstrakte Funktionen und Wege	193
10.2.	Modellierung des Rand-Anfangswertproblems für eine parabolische Gleichung als Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung im Hilbertraum	196
10.3.	Lösung des Anfangswertproblems für die Operatordifferentialgleichung (10.13) einer linearen parabolischen Gleichung	199
10.4.	Das Anfangswertproblem für die Operatordifferentialgleichung einer linearen hyperbolischen Gleichung	204
10.5.	Glatte Lösungen einer frei schwingenden Saite	208
11.	Theorie der Evolutionsgleichungen	212
11.1.	Das Integral über Wege im Banachraum	212
11.2.	Hilberträume abstrakter Funktionen	214
11.3.	Evolutionsgleichungen	218
11.4.	Das Anfangswertproblem für Differentialgleichungen im Hilbertraum	223
11.5.	Das Galerkin-Verfahren für Evolutionsgleichungen	227
11.6.	Gleichmäßige Abschätzungen der Galerkinschen Näherungslösungen	228
11.7.	Projektoren für Wege	233
11.8.	Lösung der erweiterten Evolutionsgleichung	234
11.9.	Konvergenz des Galerkin-Verfahrens für Evolutionsgleichungen	237
11.10.	Kommentare zu Kapitel 8 bis 11	240
	Anhang 1. Der Satz von Stone-Weierstraß	242
	Anhang 2. Maßtheoretische Grundlagen der Integration stetiger Funktionen	246
2.1.	Maß und Integral	246
2.2.	Eigenschaften des Integrals	250
2.3.	σ -Erweiterungen und die Borelmengen des Raumes $\mathbb{R}^m$	253
2.4.	Äußere Maße und das Lebesguesche Maß für Borelmengen	255
2.5.	Integration stetiger Funktionen	260
2.6.	Mittelfunktionen	264
2.7.	Integralrelationen	271
	Literatur	276
	Namen- und Sachverzeichnis	278