

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Auftreten der LAMÉschen, MATHIEUschen und verwandter Differentialgleichungen in physikalischen und technischen Problemen . . . . .</b>	<b>1</b>
1. Transformation der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auf elliptische Koordinaten . . . . .	1
a) Gestrecktes Rotationsellipsoid . . . . .	2
b) Abgeplattetes Rotationsellipsoid . . . . .	3
c) Dreiachsiges Ellipsoid . . . . .	4
d) Elliptischer Zylinder . . . . .	5
e) Bemerkung über die Benennung „LAMÉsche“ bzw. „MATHIEUsche“ Differentialgleichung . . . . .	6
2. Wellenmechanische Probleme . . . . .	7
a) Elektronenbewegung im eindimensionalen Atomgitter . . . . .	7
b) Quantelung des asymmetrischen Kreisels . . . . .	8
3. Hydrodynamische Probleme. . . . .	8
a) Bewegung von Ellipsoiden und elliptischen Zylindern in idealen Flüssigkeiten . . . . .	9
b) Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeitsmassen . . . . .	9
c) Eigenschwingungen des Wassers in einem elliptischen Becken .	10
4. Mechanische und elektrische Anfangswertprobleme . . . . .	10
a) Bewegung eines Massenpunktes in einem periodisch mit der Zeit veränderlichen Kraftfeld . . . . .	10
b) Elektrizitätsbewegung in einem Schwingungskreis, dessen Elemente periodisch mit der Zeit veränderlich sind . . . . .	11
c) Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Schwingungsvorgänge . .	12
<b>II. HILLSche Differentialgleichung. . . . .</b>	<b>12</b>
1. Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik als Sonderfälle der HILLSchen Gleichung . . . . .	12
a) Die Differentialgleichung der LEGENDRESchen Polynome . . . .	13
b) Die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung . . . .	13
2. Allgemeine Sätze über die HILLSche Differentialgleichung . . . .	13
a) Labile und stabile Lösungen der HILLSchen Differentialgleichung	14
b) Sätze von O. HAUPT über die labilen und stabilen $\lambda$ -Werte . .	14
c) Weitere Fragen über die HILLSche Differentialgleichung . . . .	16
3. Die HILLSche Differentialgleichung mit beschränkter Funktion $\Phi$ und mit zwei Parametern . . . . .	16
a) Asymptotische Berechnung des charakteristischen Exponenten.	17
b) Sätze über die Parameterwerte, welche zu stabilen bzw. labilen Lösungen gehören . . . . .	18
c) Asymptotische Berechnung der ganz- und halbperiodischen Eigenwerte . . . . .	19
4. Auflösung der HILLSchen Differentialgleichung . . . . .	20
a) Die HILLSche Lösungsmethode . . . . .	21
b) HILLSche Funktionen . . . . .	22

	Seite
<b>III. MATHIEUSche Differentialgleichung</b> . . . . .	23
1. Allgemeine Auflösung der MATHIEUSchen Differentialgleichung. . . . .	23
a) Eigenschaften der Lösungen bei vorgegebenem $\lambda$ und $h$ . . . . .	24
b) Berechnung des charakteristischen Exponenten aus der HILL- schen Determinante . . . . .	25
c) Berechnung des charakteristischen Exponenten nach E. T. WHIT- TAKER . . . . .	26
d) Berechnung des charakteristischen Exponenten nach E. L. INCE . . . . .	27
e) Asymptotische Berechnung des charakteristischen Exponenten. . . . .	28
2. Periodische Lösungen; MATHIEUSche Funktionen . . . . .	29
a) Vier Typen MATHIEUScher Funktionen erster Art . . . . .	30
b) Berechnung der Funktionen erster Art nach E. MATHIEU . . . . .	31
c) Numerische Ergebnisse von E. MATHIEU . . . . .	32
d) Berechnung der MATHIEUSchen Funktionen nach E. L. INCE und S. GOLDSTEIN . . . . .	34
e) Orthogonalitätseigenschaften der MATHIEUSchen Funktionen erster Art . . . . .	35
3. Verlauf der Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Lösungs- gebieten der MATHIEUSchen Gleichung . . . . .	36
a) Berührung der Grenzkurven für $h = 0$ und $\lambda = n^2$ . . . . .	36
b) Asymptotischer Verlauf der Grenzkurven . . . . .	37
c) Asymptotisches Verhalten der MATHIEUSchen Funktionen . . . . .	38
d) Exkurs zu einer verwandten Differentialgleichung . . . . .	39
4. MATHIEUSche Funktionen zweiter Art . . . . .	40
a) Zu jedem ganz- bzw. halbperiodischen Eigenwert gibt es nur eine ganz- bzw. halbperiodische Eigenfunktion . . . . .	41
b) Berechnung der MATHIEUSchen Funktionen zweiter Art nach E. L. INCE und nach B. SIEGER. . . . .	41
c) Berechnung der MATHIEUSchen Funktionen zweiter Art nach S. GOLDSTEIN . . . . .	42
5. MATHIEUSche Gleichung mit einer rein imaginären unabhängigen Veränderlichen. . . . .	43
a) Zugeordnete MATHIEUSche Funktionen erster, zweiter und dritter Art; Charakterisierung durch ihr asymptotisches Verhalten. . . . .	43
b) Reihendarstellung der zugeordneten Funktionen nach E. HEINE . . . . .	45
c) Reihendarstellung der zugeordneten Funktionen nach B. SIEGER . . . . .	46
d) Konvergenzfragen bei diesen Darstellungen . . . . .	48
6. Allgemeine Bemerkungen über MATHIEUSche Funktionen . . . . .	48
a) Bemerkungen über die Bezeichnung der MATHIEUSchen Funk- tionen . . . . .	48
b) Entartungen der MATHIEUSchen Funktionen; WEBER-HERMITE- sche und BESSELSche Funktionen. . . . .	49
c) Weitere Fragen über die MATHIEUSche Differentialgleichung. . . . .	51
<b>IV. LAMÉSche Differentialgleichung</b> . . . . .	51
1. LAMÉSche Potentialfunktionen auf einer Ellipsoidfläche . . . . .	52
a) Aufzählung von vier Arten LAMÉScher Potentialfunktionen auf einer Ellipsoidfläche . . . . .	52
b) Eigenwerte der Ellipsoidflächenfunktionen; Abzählung der ver- schiedenen Funktionen vorgegebener Ordnung . . . . .	53
c) Orthogonalitätseigenschaften der Ellipsoidflächenfunktionen . . . . .	54

	Seite
2. LAMÉSche Potentialfunktionen im Raum . . . . .	55
a) LAMÉSche Produkte . . . . .	55
b) Zugeordnete LAMÉSche Funktionen . . . . .	56
3. Darstellung der LAMÉSchen Potentialfunktionen . . . . .	57
a) Ausdrücke für die LAMÉSchen Potentialfunktionen bis zur Ordnung $n = 3$ . . . . .	57
b) Rotationssymmetrische Fälle . . . . .	58
4. LAMÉSche Wellenfunktionen des dreiachsigen Ellipsoids . . . . .	60
a) LAMÉSche Wellenfunktionen auf einer Ellipsoidfläche . . . . .	60
b) Orthogonalität der LAMÉSchen Wellenfunktionen auf einer Ellipsoidfläche . . . . .	61
c) LAMÉSche Wellenfunktionen im Raum . . . . .	62
d) Asymptotisches Verhalten der LAMÉSchen Wellenfunktionen im Raum . . . . .	63
e) Andere Konstruktion der LAMÉSchen Wellenfunktionen . . . . .	64
5. LAMÉSche Wellenfunktionen bei Rotationsellipsoiden . . . . .	65
a) LAMÉSche Wellenfunktionen auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoids . . . . .	65
b) Rotationssymmetrische LAMÉSche Wellenfunktionen im Raum . . . . .	66
c) Berechnung der rotationssymmetrischen Wellenfunktionen nach C. NIVEN . . . . .	67
d) Berechnung der Eigenwerte $\lambda$ nach C. NIVEN und R. MACLAURIN . . . . .	68
e) Berechnung der Koeffizienten $a_r$ und $b_r$ nach C. NIVEN . . . . .	70
f) Darstellung der rotationssymmetrischen LAMÉSchen Wellenfunktionen durch Reihen BESSELScher bzw. HANKELScher Funktionen . . . . .	71
g) Bemerkungen zu vorstehenden Reihendarstellungen . . . . .	73
h) Andere Darstellung der LAMÉSchen Wellenfunktionen durch Reihen BESSELScher Funktionen . . . . .	73
6. Allgemeine Bemerkungen über LAMÉSche Funktionen . . . . .	75
a) MATHIEUSche Funktionen als Entartung LAMÉScher Funktionen . . . . .	75
b) Kugelfunktionen und BESSELSche Funktionen als Entartungen . . . . .	76
c) Weitere Fragen über die LAMÉSche Differentialgleichung . . . . .	77
<b>V. Wellenausbreitungsprobleme aus der Physik und aus der Technik. . . . .</b>	<b>78</b>
1. Beugung einer ebenen elektrischen oder akustischen Welle an einer elliptischen Öffnung in einem dünnen ebenen Schirm . . . . .	78
a) Mathematische Formulierung der Aufgabe für elektromagnetische und für akustische Wellen . . . . .	78
b) Entwicklung der Beugungsfunktionen für eine elliptische Öffnung nach LAMÉSchen Funktionen . . . . .	80
c) Abmessungen der Beugungsöffnung sehr klein, gemessen an der Wellenlänge. Beugung von Schallwellen . . . . .	81
d) Entwicklung nach MATHIEUSchen Funktionen im Sonderfall eines Spaltes . . . . .	82
e) Bemerkung zum HUYGENSSchen Prinzip . . . . .	85
2. Beugung einer ebenen elektrischen oder akustischen Welle an einem Ellipsoid oder an einem elliptischen Zylinder . . . . .	86
a) Mathematische Formulierung des Beugungsproblems im elektrischen und im akustischen Fall . . . . .	86
b) Entwicklung der Beugungsfunktion nach LAMÉSchen Wellenfunktionen beim Ellipsoid . . . . .	87

	Seite
c) Beugung am abgeplatteten Rotationsellipsoid; insbesondere an einer Kreisplatte . . . . .	87
d) Bemerkung über das Prinzip von BABINET . . . . .	88
3. Schallstrahlungsprobleme im Zusammenhang mit einer starren Kreisplatte. . . . .	89
a) Schallstrahlung einer frei axial schwingenden starren Kreisplatte	89
b) Sonderfälle sehr großer und sehr kleiner Wellenlänge . . . . .	90
c) Schwingende Kreisscheibe in einer ebenen kreisförmigen Schirmwand . . . . .	91
d) Sonderfall einer unendlich großen ebenen Schirmwand . . . . .	92
e) Schallstrahlungsaufgaben mit hyperboloidisch geformtem Horn	93
f) Bemerkung über zweidimensionale Probleme, die den obigen analog sind . . . . .	94
<b>VI. Eigenschwingungsprobleme.</b> . . . . .	95
1. Innenraumprobleme . . . . .	95
a) Eigenschwingungen eines Luftvolumens, das von einem Ellipsoid begrenzt ist . . . . .	96
b) Eigenzeitkonstanten ellipsoidischer Leiter . . . . .	97
2. Außenraumprobleme . . . . .	98
a) Elektromagnetische Eigenschwingungen eines leitenden gestreckten Rotationsellipsoids . . . . .	98
b) Gleichung für die Eigenfrequenzen bei unendlich guter Leitfähigkeit . . . . .	99
c) Sonderfälle der Kugel und des stabförmigen Leiters . . . . .	100
d) Elektromagnetische Eigenschwingungen eines elliptischen Zylinders . . . . .	101
<b>VII. Wellenmechanische Probleme.</b> . . . . .	102
1. Elektronenbewegung im ruhenden Kristallgitter . . . . .	102
a) Modell für das eindimensionale Kristallgitter. . . . .	102
b) Berechnung der Reflexion einer Elektronenwelle an der Grenze eines Gitters . . . . .	104
c) Theorie der Wellensiebe mit kontinuierlichen Elementen . . . . .	105
d) Diskussion der Siebgleichung; die klassischen Kettenleiterformeln als Sonderfälle . . . . .	106
2. Quantelung des asymmetrischen Kreisels. . . . .	108
a) Einführung elliptischer Koordinaten; LAMÉsche Funktionen . . . . .	108
b) Energiewerte als Eigenwerte der LAMÉschen Gleichungen; Numerisches . . . . .	109
<b>VIII. Literaturverzeichnis</b> . . . . .	110