

# Inhaltsverzeichnis.

## Erster Abschnitt.

### Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

#### Erstes Kapitel.

##### Die komplexen Zahlen.

	Seite
§ 1. Begriff der komplexen Zahl . . . . .	1
§ 2. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen. Sätze über den absoluten Betrag . . . . .	4
§ 3. Konvergente Zahlenfolgen. Die Zahlenkugel . . . . .	7
§ 4. Grenzwerte unendlicher Zahlenmengen . . . . .	12
§ 5. Konvergenz der Reihen mit komplexen Gliedern . . . . .	14
§ 6. Komplexe Variable und Funktionen derselben . . . . .	18
§ 7. Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	20

#### Zweites Kapitel.

##### Die Potenzreihen.

§ 1. Konvergenzgebiet einer Potenzreihe . . . . .	22
§ 2. Bestimmung des Konvergenzradius . . . . .	25
§ 3. Das Rechnen mit Potenzreihen . . . . .	27
§ 4. Prinzip der Koeffizientenvergleichung . . . . .	31
§ 5. Ausdehnung der erhaltenen Sätze . . . . .	32
§ 6. Die Umbildungen einer Potenzreihe . . . . .	33
§ 7. Die Ableitungen einer Potenzreihe . . . . .	36
§ 8. Unmittelbare Fortsetzungen einer Potenzreihe . . . . .	38
§ 9. Laurentsche Reihen. Ein Hilfssatz über Potenzreihen . . . . .	40

#### Drittes Kapitel.

##### Der Begriff der analytischen Funktion.

§ 1. Monogene Systeme von Potenzreihen . . . . .	43
§ 2. Definition der analytischen Funktion . . . . .	44
§ 3. Eindeutige Zweige einer analytischen Funktion . . . . .	46
§ 4. Beispiele . . . . .	48
§ 5. Die Elementarzweige und ihre singulären Punkte . . . . .	52
§ 6. Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	55
§ 7. Singuläre Punkte eines eindeutigen Zweiges . . . . .	56
§ 8. Die singulären Stellen der ganzen und der rationalen Funktionen . . . . .	60
§ 9. Einige allgemeine Sätze über analytische Funktionen . . . . .	62
§ 10. Der Weierstraßsche Summensatz . . . . .	65

## Viertes Kapitel.

Seite

**Untersuchung einiger spezieller analytischer Funktionen.**

§ 1. Die Exponentialfunktion . . . . .	69
§ 2. Die trigonometrischen Funktionen . . . . .	71
§ 3. Der Logarithmus . . . . .	74
§ 4. Die allgemeine Potenz . . . . .	79

## Fünftes Kapitel.

**Die Integration analytischer Funktionen.**

§ 1. Gleichmäßige Stetigkeit und Differentierbarkeit analytischer Funktionen . . . . .	82
§ 2. Integration der Potenzreihen . . . . .	84
§ 3. Integration der Ableitung einer regulären Funktion . . . . .	85
§ 4. Beispiele . . . . .	87
§ 5. Integration regulärer Funktionen . . . . .	91
§ 6. Der Satz von Cauchy . . . . .	94
§ 7. Folgerungen aus dem Satz von Cauchy. Der Satz von Laurent . . . . .	96
§ 8. Die Residuen der analytischen Funktionen . . . . .	102
§ 9. Bestimmung der Null- und Unendlichkeitsstellen einer Funktion . . . . .	105

## Sechstes Kapitel.

**Die meromorphen Funktionen.**

§ 1. Begriff der meromorphen Funktion . . . . .	109
§ 2. Die meromorphen Funktionen mit endlich vielen Polen . . . . .	110
§ 3. Die meromorphen Funktionen mit unendlich vielen Polen. Der Mittag-Lefflersche Satz . . . . .	110
§ 4. Allgemeiner Ausdruck einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polen . . . . .	113
§ 5. Der Fall einfacher Pole . . . . .	114
§ 6. Beispiele . . . . .	116
§ 7. Cauchys Methode der Partialbruchzerlegung . . . . .	119
§ 8. Beispiele . . . . .	121
§ 9. Ganze Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen . . . . .	124
§ 10. Darstellung der meromorphen Funktionen durch ganze Funktionen . . . . .	128
§ 11. Die Produktdarstellung der Gammafunktion . . . . .	129
§ 12. Die Integraldarstellung der Gammafunktion . . . . .	132

## Siebentes Kapitel.

**Die Umkehrung der analytischen Funktionen.**

§ 1. Umkehrung der Potenzreihen . . . . .	137
§ 2. Beispiele . . . . .	142

## Zweiter Abschnitt.

**Elliptische Funktionen.**

## Erstes Kapitel.

**Die doppelperiodischen meromorphen Funktionen.**

§ 1. Zur geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen . . . . .	148
§ 2. Sätze über die Perioden einer meromorphen Funktion . . . . .	149
§ 3. Das Periodenparallelogramm . . . . .	154

	Seite
§ 4. Definition der elliptischen Funktionen. Der Körper $K$ . . . . .	156
§ 5. Allgemeine Sätze über die Funktionen $f(u)$ . . . . .	157
§ 6. Die Funktion $\wp(u)$ . . . . .	162
§ 7. Die Differentialgleichung von $\wp(u)$ . . . . .	167
§ 8. Das Additionstheorem von $\wp(u)$ . . . . .	170
§ 9. Darstellung der elliptischen Funktionen durch die $\wp$ -Funktion . .	172
§ 10. Eigenschaften der Funktionen $f(u)$ . . . . .	175
§ 11. Die Funktion $\zeta(u)$ . . . . .	176
§ 12. Darstellung der elliptischen Funktionen durch $\zeta(u)$ . . . . .	178
§ 13. Die Funktion $\sigma(u)$ . . . . .	180
§ 14. Darstellung der elliptischen Funktionen durch die Funktion $\sigma(u)$ .	183
§ 15. Die Funktionen $\wp(u)$ , $\zeta(u)$ , $\sigma(u)$ als Funktionen von $u$ , $\omega_1$ , $\omega_2$ . .	185

Zweites Kapitel.

Die Theta-Funktionen.

§ 1. Darstellung ganzer Funktionen mit einer gegebenen Periode . . .	190
§ 2. Bezeichnungen . . . . .	191
§ 3. Die Funktion $\vartheta_1(v)$ . . . . .	192
§ 4. Die Funktionen $\sigma_1(u)$ , $\sigma_2(u)$ , $\sigma_3(u)$ . . . . .	194
§ 5. Die Funktionen $\vartheta_2(v)$ , $\vartheta_3(v)$ , $\vartheta_0(v)$ . . . . .	196
§ 6. Zusammenstellung . . . . .	197
§ 7. Zusammenfassende Darstellung der $\vartheta$ -Funktionen. Die $\vartheta$ -Funktionen als Funktionen von $v$ und $\tau$ . . . . .	198
§ 8. Verwandlungsformeln und Nullstellen der vier $\vartheta$ -Funktionen . . .	201
§ 9. Darstellung von $e_1$ , $e_2$ , $e_3$ und $\Delta$ durch die Nullwerte der $\vartheta$ . . .	202
§ 10. Darstellung der $\vartheta$ -Funktionen durch unendliche Produkte . . . .	204
§ 11. Einige zahlentheoretische Anwendungen der erhaltenen Resultate .	207
§ 12. Partialbruchzerlegungen von $\zeta(u)$ und $\wp(u)$ als Funktionen von $x^2$ . Darstellungen von $\eta$ , $g_2$ , $g_3$ . . . . .	210
§ 13. Entwicklung von $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ . . . . .	212

Drittes Kapitel.

Die elliptischen Funktionen Jacobis.

§ 1. Definition der Funktionen $s(u)$ , $c(u)$ , $\Delta(u)$ . . . . .	215
§ 2. Die Funktionen $s(u)$ , $c(u)$ , $\Delta(u)$ als elliptische Funktionen . . . .	217
§ 3. Die Differentialgleichungen von $s(u)$ , $c(u)$ , $\Delta(u)$ . . . . .	218
§ 4. Die Additionstheoreme von $s(u)$ , $c(u)$ , $\Delta(u)$ . . . . .	218
§ 5. Die trigonometrischen Funktionen als spezielle Fälle der Funktionen $s(u)$ , $c(u)$ , $\Delta(u)$ . . . . .	219

Viertes Kapitel.

Die elliptischen Modulfunktionen.

§ 1. Äquivalenz der Größenpaare und der Größen . . . . .	221
§ 2. Die elementaren Modulformen . . . . .	224
§ 3. Die absolute Invariante $J(\tau)$ . . . . .	224
§ 4. Auflösung der Gleichungen $g_2(\omega_1, \omega_2) = c_2$ , $g_3(\omega_1, \omega_2) = c_3$ . . .	228
§ 5. Die Funktion $\kappa^2(\tau)$ . . . . .	229

Fünftes Kapitel.

Elliptische Gebilde.

§ 1. Das Weierstraßsche Gebilde . . . . .	230
§ 2. Das Gebilde $y^2 = G_3(x)$ . . . . .	231

§ 3.	Das Gebilde $y^2 = G_4(x)$ . . . . .	232
§ 4.	Das Legendresche Gebilde . . . . .	233
§ 5.	Die Hauptform der Riemannschen Fläche des Gebildes $y^2 = G_4(x)$ . . . . .	233
§ 6.	Die zweiblättrige Form der Riemannschen Fläche von $y^2 = G_4(x)$ . . . . .	235

## Sechstes Kapitel.

**Elliptische Integrale.**

§ 1.	Definitionen . . . . .	239
§ 2.	Die unbestimmten elliptischen Integrale . . . . .	240
§ 3.	Die bestimmten elliptischen Integrale . . . . .	243

## Siebentes Kapitel.

**Die Transformation der elliptischen Funktionen.**

§ 1.	Lineare Transformation der Weierstraßschen Funktionen . . . . .	247
§ 2.	Lineare Transformation der $\vartheta$ -Funktionen . . . . .	248
§ 3.	Transformation 2 <sup>ter</sup> Ordnung . . . . .	251
§ 4.	Zusammenhang zwischen den Weierstraßschen und den Jacobischen elliptischen Funktionen . . . . .	253
§ 5.	Die Landensche Transformation . . . . .	254
§ 6.	Das arithmetisch-geometrische Mittel . . . . .	256

## Dritter Abschnitt.

**Geometrische Funktionentheorie.**

## Erstes Kapitel.

**Vorbereitende Betrachtungen.**

§ 1.	Geometrische Grundbegriffe . . . . .	259
§ 2.	Kurvenintegrale . . . . .	266

## Zweites Kapitel.

**Die Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen.**

§ 1.	Die Forderung der Differentiierbarkeit . . . . .	271
§ 2.	Die inverse Funktion . . . . .	274
§ 3.	Die Integration analytischer Funktionen und der Cauchysche Integralsatz . . . . .	275
§ 4.	Beispiele. Elementare Funktionen . . . . .	280
§ 5.	Die Cauchysche Integralformel . . . . .	283
§ 6.	Die Taylorsche und Laurentsche Reihe . . . . .	286
§ 7.	Konforme Abbildung . . . . .	289

## Drittes Kapitel.

**Weitere Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.**

§ 1.	Der Satz vom arithmetischem Mittel . . . . .	292
§ 2.	Abschätzungsformeln . . . . .	293
§ 3.	Ein Konvergenzsatz von Weierstraß . . . . .	294
§ 4.	Das Häufungsstellenprinzip für analytische Funktionen . . . . .	295
§ 5.	Zusammenhang mit der Potentialtheorie . . . . .	298
§ 6.	Darstellung der analytischen Funktionen und der Potentialfunktionen durch das Poissonsche Integral . . . . .	299
§ 7.	Folgerungen . . . . .	302
§ 8.	Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis . . . . .	304
§ 9.	Die Randwerte einer analytischen Funktion . . . . .	306
§ 10.	Strömungen . . . . .	312

## Viertes Kapitel.

## Spezielle Funktionen und ihre Singularitäten.

§ 1.	Singularitäten und Kreuzungspunkte . . . . .	314
§ 2.	Veranschaulichung der einfachsten Singularitäten und Kreuzungspunkte . . . . .	318
§ 3.	Lineare Funktionen . . . . .	323
§ 4.	Die Funktion $\zeta = z^n$ . . . . .	331
§ 5.	Die Funktion $\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . . . . .	333
§ 6.	Logarithmus und Exponentialfunktion . . . . .	335
§ 7.	Die trigonometrischen Funktionen . . . . .	336
§ 8.	Potenzen mit beliebigen Exponenten. Kreisbogenzweiecke . . . . .	337
§ 9.	Anhang. Raumgeometrische Deutung der linearen Substitutionen . . . . .	338

## Fünftes Kapitel.

## Analytische Fortsetzung und Riemannsche Fläche.

§ 1.	Allgemeines über analytische Fortsetzung . . . . .	345
§ 2.	Das Prinzip der Stetigkeit und das Spiegelungsprinzip . . . . .	348
§ 3.	Der Gesamtverlauf der analytischen Funktionen und ihre Riemannschen Flächen . . . . .	351
§ 4.	Die algebraischen Funktionen . . . . .	359

## Sechstes Kapitel.

Die konforme Abbildung einfach zusammenhängender  
schlichter Bereiche.

§ 1.	Vorbemerkungen und Hilfssätze . . . . .	366
§ 2.	Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes . . . . .	369
§ 3.	Der Eindeutigkeitsatz . . . . .	372
§ 4.	Ränderzuordnung bei konformer Abbildung . . . . .	373
§ 5.	Die Greensche Funktion und die Randwertaufgabe der Potentialtheorie . . . . .	379
§ 6.	Das alternierende Verfahren. Stetigkeitseigenschaften der Abbildungsfunktion . . . . .	381
§ 7.	Anhang. Verzerrungssätze . . . . .	387

## Siebentes Kapitel.

## Spezielle Abbildungsfunktionen.

§ 1.	Die allgemeine Polygonabbildung . . . . .	392
§ 2.	Die Funktionen des geradlinigen Dreiecks . . . . .	395
§ 3.	Abbildung des Rechtecks. Elliptische Funktionen . . . . .	397
§ 4.	Modulfunktionen und automorphe Funktionen . . . . .	400
§ 5.	Der Picardsche Satz . . . . .	405
§ 6.	Die Abbildungsfunktionen von Kreisbogenpolygonen als Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	407

## Achstes Kapitel.

## Die Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes.

## Das Dirichletsche Prinzip.

§ 1.	Heuristische Betrachtungen. Strömungspotentiale. Schlitzbereiche . . . . .	411
§ 2.	Das Dirichletsche Integral und die Greensche Formel . . . . .	414
§ 3.	Das Dirichletsche Prinzip . . . . .	417
§ 4.	Erweiterte Fassung des Problems . . . . .	421
§ 5.	Randwertaufgabe und Minimumprinzip für den Kreis . . . . .	424

	Seite
§ 6. Hilfssätze . . . . .	426
§ 7. Lösung des Minimumproblems für spezielle Gebiete . . . . .	430
§ 8. Die Stetigkeit der Strömungspotentiale in ihrer Abhängigkeit vom Gebiet. Lösung des allgemeinen Minimumproblems . . . . .	436
§ 9. Die konforme Abbildung auf Schlitzbereiche . . . . .	438
§ 10. Die eindeutige Bestimmtheit der Schlitzabbildung . . . . .	445

### Neuntes Kapitel.

#### Weitere Existenztheoreme der Funktionentheorie.

§ 1. Die algebraischen Riemannschen Flächen und ihre Analysis situs . . . . .	446
§ 2. Die Abelschen Integrale und algebraischen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche . . . . .	451
§ 3. Die Existenz automorpher Funktionen mit gegebenem Fundamentalbereich . . . . .	459
§ 4. Die Uniformisierung der algebraischen und analytischen Funktionen durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis . . . . .	468
§ 5. Die konforme Abbildung schlichtartiger Bereiche auf Kreisbereiche. Das Rückkehrschnitt-Theorem . . . . .	476
§ 6. Die Moduln eines schlichtartigen Bereiches . . . . .	484
§ 7. Der allgemeine Begriff der Riemannschen Fläche . . . . .	486
§ 8. Historische Angaben zu den letzten Kapiteln . . . . .	489
Sachverzeichnis . . . . .	492