Inhalt

1. Metrische Räume	11
1.1 Erklärung metrischer Räume	11
1.2 Beispiele für metrische Räume	12
1.3 Einige Eigenschaften metrischer Räume	15
2. Vektorräume	17
2.1 Erklärung von Vektorräumen	17
2.2 Beispiele für Vektorräume	18
2.3 Einfache Aussagen über Vektorräume	20
3. Normierte Vektorräume	22
3.1 Einführung des Normbegriffes	22
3.2 Zusammenhang zwischen normierten Vektorräumen und Vektorräumen mit Abstandsfunktion	25
3.3 Beispiele für normierte Vektorräume	28
3.4 Einfache Aussagen über Normen und normierte Vektorräume	38
4. Skalarprodukträume	44
4.1 Einführung des Skalarproduktes	44
4.2 Skalarprodukt im zweidimensionalen „Anschauungsraum“	47
4.3 Zwei einfache Sätze über Skalarprodukte	49
4.4 Winkelmessung	50
4.5 Zusammenhang zwischen Skalarprodukträumen und normierten Vektorräumen	52
4.6 Gewinnung von Skalarprodukträumen aus den Beispielen für normierte Vektorräume	55
4.7 Orthogonalisierung	60
4.8 Strikte Normen	62
5. Approximation in endlichdimensionalen Skalarprodukträumen und normierten Vektorräumen	68
5.1 Abweichungsmaße bei der Approximation von Meßserien	68
5.2 Approximation von Meßserien mit Hilfe von konstanten Funktionen	73
5.2.1 Approximation in der Quadratnorm	73
5.2.2 Approximation in der Betragnorm	74

5.2.3	Approximation in der Maximumnorm	80
5.2.4	Vergleich der Approximationen mit Hilfe von konstanten Funktionen	81
5.3	Approximation von Meßserien mit Hilfe von speziellen linearen Funktionen $x \mapsto ax$	83
5.3.1	Approximation in der Quadratnorm	83
5.3.2	Approximation in der Betragnorm	84
5.3.3	Approximation in der Maximumnorm	86
5.4	Approximation von Meßserien mit Hilfe von linearen Funktionen $x \mapsto ax + b$	88
5.4.1	Approximation in der Quadratnorm	88
5.4.2	Approximation in der Maximumnorm	92
5.5	Minimål Abstand eines Vektors aus einem endlichdimensionalen Skalarprodukt Raum von einem Unterraum	93
5.6	Approximation von Meßserien mit Hilfe von Polynomfunktionen in der Quadratnorm	99
5.6.1	Lineare Unabhångigkeit der Vektoren $\vec{x}^m, \vec{x}^{m-1}, \dots, \vec{x}, \vec{1}$	99
5.6.2	Behandlung der Approximationsaufgabe mit der Vektorraummethode	101
5.6.3	Direkte Behandlung der Approximationsaufgabe	104
5.7	Approximation von Meßserien mit Hilfe von verallgemeinerten Polynomen in der Quadratnorm	106
5.8	Approximation von Meßserien mit Hilfe von Polynomfunktionen in der Betragnorm	108
5.9	Approximation von Meßserien mit Hilfe von Polynomfunktionen in der Maximumnorm	110
5.10	Approximation von Meßserien mit Hilfe von verallgemeinerten Polynomen in der Maximumnorm	113
5.10.1	<i>Tschebyscheff</i> systeme	113
5.10.2	Interpolation mit verallgemeinerten Polynomen, <i>Haarsche</i> Bedingung	114
5.10.3	Bemerkung über <i>Tschebyscheff</i> systeme	116
6.	Grenzwerte, Vollståndigkeit, Stetigkeit	119
6.1	Konvergenz von Folgen in metrischen Råumen	119
6.2	Beispiele für endlichdimensionale <i>Hilbert</i> -Råume und <i>Banach</i> -Råume	122
6.3	Vollståndigkeit von endlichdimensionalen normierten Vektorråumen und Skalarprodukt råumen	125
6.4	<i>Hilbert</i> scher Folgenraum	128
6.5	Vollståndigkeit von unendlichdimensionalen normierten Vektorråumen und Skalarprodukt råumen	134
6.6	Stetigkeit von Norm, Metrik und Skalarprodukt	138

7. Approximation in unendlichdimensionalen Skalarprodukträumen . . .	142
7.1 Minimalabstand eines Vektors aus einem unendlichdimensionalen Skalarproduktraum von einem endlichdimensionalen Unterraum	142
7.2 Approximation von stetigen Funktionen mit Hilfe von Polynomfunktionen in der Quadratnorm	144
7.3 Approximation von stetigen Funktionen mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen in der Quadratnorm	148
7.4 Fourierreihen	155
7.5 Minimalabstand eines Vektors aus einem unendlichdimensionalen Skalarproduktraum von einem vollständigen Unterraum	162
8. Approximation in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen	167
8.1 Minimalabstand eines Vektors aus einem endlichdimensionalen oder unendlichdimensionalen normierten Vektorraum von einem endlichdimensionalen Unterraum	167
8.2 Approximation von stetigen Funktionen mit Hilfe von Polynomfunktionen in der Betragnorm	169
8.3 Approximation von stetigen Funktionen mit Hilfe von Polynomfunktionen in der Maximumnorm	175
8.4 Vergleichende Beispiele für die Approximation von stetigen Funktionen mit Hilfe von Polynomfunktionen in verschiedenen Normen	186
8.5 <i>Legendresche</i> Polynome und <i>Tschebyscheff</i> -Polynome erster und zweiter Art als Lösungen von Approximationsaufgaben	200
8.6 Approximation von stetigen Funktionen mit Hilfe von verallgemeinerten Polynomen in der Betrag- bzw. Maximumnorm	205
9. Ausblicke	210
Literaturverzeichnis	212
Register	213