

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen	Seite XV
------------------------------	---------------------------

Kapitel I

Grundlagen der Funktionalanalysis mit Anwendungen

§ 1.	Typische Fragestellungen der numerischen Mathematik . .	1
1.1	Einige allgemeine Begriffe	1
1.2	Lösungen von Gleichungen	2
1.3	Untersuchung der Eigenschaften der Lösungen von Gleichungen .	6
1.4	Extremalaufgaben mit oder ohne Nebenbedingungen	6
1.5	Darstellungsaufgaben (Koeffizientenbestimmungen)	8
1.6	Auswertungen	11
§ 2.	Einige Typen von Räumen	12
2.1	HÖLDERSche und MINKOWSKISCHE Ungleichung	12
2.2	Der topologische Raum	14
2.3	Quasimetrische und metrische Räume	16
2.4	Lineare Räume	22
2.5	Normierte Räume	23
2.6	Unitäre Räume und SCHWARZSCHE Ungleichung	27
2.7	Die Parallelogrammgleichung	29
2.8	Orthogonalität in unitären Räumen, BESSELSche Ungleichung . .	33
§ 3.	Ordnungen.	36
3.1	Halbordnung und Totalordnung	36
3.2	Verbände	38
3.3	Pseudometrische Räume	40
§ 4.	Konvergenz und Vollständigkeit	41
4.1	Konvergenz im pseudometrischen Raum	41
4.2	Cauchy-konvergente Folgen	43
4.3	Vollständigkeit, Hilbert- und Banachräume	43
4.4	Einige Stetigkeitsaussagen	49
4.5	Einfache Folgerungen für den HILBERTSchen Raum, Unterräume .	50
4.6	Vollständige Orthonormalsysteme in Hilberträumen	52
4.7	Beispiele	56
4.8	Schwache Konvergenz	60
§ 5.	Kompaktheit	61
5.1	Kompakt und kompakt in sich	61
5.2	Beispiele für Kompaktheit	63

5.3	Der Satz von ARZELÀ	64
5.4	Von Integraloperatoren erzeugte, in sich kompakte Funktionen- mengen	67
§ 6.	Operatoren in pseudometrischen und spezielleren Räumen	69
6.1	Lineare und beschränkte Operatoren.	69
6.2	Zusammensetzung von Operatoren	71
6.3	Der inverse Operator	73
6.4	Beispiele von Operatoren	75
6.5	Die Inversen benachbarter Operatoren	79
6.6	Die Kondition eines linearen beschränkten Operators	81
6.7	Eine Fehlerabschätzung für ein Iterationsverfahren	82
6.8	Der Satz von RIESZ und der Auswahlssatz	83
6.9	Ein Satz von BANACH über Folgen von Operatoren	84
6.10	Anwendung auf Quadraturformeln	86
§ 7.	Operatoren in Hilberträumen	88
7.1	Der adjungierte Operator	88
7.2	Beispiele	91
7.3	Differentialoperatoren bei Funktionen einer Veränderlichen	94
7.4	Differentialoperatoren bei Funktionen mehrerer Veränderlichen	96
7.5	Vollstetige Operatoren	100
7.6	Vollstetige Integraloperatoren	102
7.7	Restgliedabschätzungen für holomorphe Funktionen	104
7.8	Ableitungsfreie Abschätzungen für Quadraturfehler	105
7.9	Ein Grundprinzip der Variationsrechnung.	108
§ 8.	Eigenwertaufgaben	110
8.1	Allgemeine Eigenwertaufgaben	110
8.2	Spektrum eines Operators in einem metrischen Raum	114
8.3	Einschließungssatz für Eigenwerte	115
8.4	Projektionen	118
8.5	Extremaleigenschaften der Eigenwerte	120
8.6	Zwei Minimalprinzipien bei Differentialgleichungen	125
8.7	RITZ'sches Verfahren	128
§ 9.	Vektornormen und Matrixnormen	132
9.1	Vektornormen	132
9.2	Vergleich verschiedener Vektornormen	133
9.3	Matrixnormen	135
9.4	Aus der Matrizenlehre	137
9.5	EUKLIDISCHE Vektornorm und passende Matrixnormen	139
9.6	Andere Vektornormen und zugeordnete Matrixnormen	141
9.7	Transformierte Normen	143
§ 10.	Weitere Sätze über Vektor- und Matrixnormen	144
10.1	Duale Vektornormen	144
10.2	Bestimmung einiger dualer Normen	146
10.3	Matrixpotenzen.	146
10.4	Eine Minimaleigenschaft der Spektralnrm	147
10.5	Abweichung einer Matrix von der Normalität	149
10.6	Spektralvariation zweier Matrizen	152
10.7	Vermischte Aufgaben zu Kapitel I	155
10.8	Hinweise zu den Lösungen bei einigen Aufgaben von 10.7	157

Kapitel II

Iterative Verfahren

	Seite
§ 11. Der Fixpunktsatz für das allgemeine Iterationsverfahren in pseudometrischen Räumen	160
11.1 Iterationsverfahren und einfache Beispiele	160
11.2 Iterationsverfahren bei Differentialgleichungen	162
11.3 Der allgemeine Fixpunktsatz	164
11.4 Beweis des allgemeinen Fixpunktsatzes	166
11.5 Der Eindeutigkeitsatz	168
§ 12. Spezialfälle des Fixpunktsatzes und Abänderung des Opera- tors	169
12.1 Spezialfall eines linearen Hilfsoperators P	169
12.2 Spezialfall eines metrischen Raumes mit P als Zahlenfaktor . .	170
12.3 Spezialfall eines metrischen Raumes mit P als nichtlinearer, reell- wertiger Funktion	172
12.4 Durchführung von Iterationen mit einem abgeänderten Operator und Genauigkeitsfragen	173
12.5 Fehlerabschätzung bei abgeänderter Iteration	176
§ 13. Iterationsverfahren bei Gleichungssystemen	177
13.1 Eine einzelne Gleichung	177
13.2 Verschiedene Iterationsverfahren bei Gleichungssystemen . .	178
13.3 Einige Konvergenzkriterien bei linearen Gleichungssystemen . .	180
13.4 Zeilen- und Spaltensummenkriterium	182
§ 14. Gleichungssysteme und Differenzenverfahren	185
14.1 Differenzenverfahren bei elliptischen Differentialgleichungen . .	185
14.2 Fehlerabschätzung für Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	188
14.3 Gruppeniteration	191
14.4 Unendliche lineare Gleichungssysteme	192
14.5 Overrelaxation mit Fehlerabschätzung	193
14.6 Wahl des Overrelaxationsfaktors	196
14.7 Methode der alternierenden Richtungen	198
§ 15. Iterationsverfahren bei Differential- und Integralgleichun- gen	200
15.1 Nichtlineare Randwertaufgaben	200
15.2 Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen	204
15.3 Integralgleichungen	206
15.4 Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen	208
15.5 Fehlerabschätzung bei hyperbolischen Systemen	211
§ 16. Ableitung von Operatoren in supermetrischen Räumen . .	213
16.1 Die FRÉCHETSche Ableitung	213
16.2 Höhere Ableitungen	214
16.3 Die Kettenregel der Differentialrechnung	216
16.4 Grundsätzliche Beispiele zur Bildung der Ableitungen	217
16.5 L -metrische Räume	220
16.6 Mittelwertsatz und TAYLORSche Formel	223

§ 17. Aufstellung von Iterationsverfahren	224
17.1 Gewöhnliches und vereinfachtes NEWTONSches Verfahren . . .	224
17.2 Fehlerabschätzung für das vereinfachte NEWTONSche Verfahren	226
17.3 Vereinfachtes NEWTONSches Verfahren bei nichtlinearen Randwert- aufgaben	228
17.4 Die Ordnung von Iterationsverfahren	230
17.5 Iterationsverfahren bei Gleichungen mit holomorphen Funktionen, auch bei mehrfachen Nullstellen	232
17.6 Allgemeines Iterationsverfahren k -ter Ordnung zur Lösung der Operatorgleichung $Tu = \Theta$	234
17.7 Bemerkung über den Rechenaufwand bei Verfahren höherer Ord- nung	237
§ 18. Regula falsi	239
18.1 Primitivform und Normalform der Regula-falsi-Verschärfungen .	239
18.2 Primitivform der Regula falsi bei reellen Funktionen einer Ver- änderlichen	240
18.3 Die Regula falsi bei Operatorgleichungen	241
18.4 Erweiterungen der Regula falsi	243
18.5 Steigungen eines Operators und NEWTONSches Interpolationspoly- nom	244
18.6 Konvergenz der Regula-falsi-Methode bei reellen Funktionen einer Veränderlichen	246
18.7 Allgemeinere Verfahren und Beispiele	249
§ 19. NEWTONSches Verfahren mit Verschärfungen	251
19.1 Das NEWTONSche Verfahren mit Verschärfungen und die grund- legenden Abschätzungsfunktionen	251
19.2 Allgemeiner Konvergenzsatz für die NEWTONSchen Verfahren mit Verschärfungen	253
19.3 Allgemeine Bemerkungen über die Anwendung des NEWTONSchen Verfahrens	256
19.4 Das NEWTONSche Verfahren bei Eigenwertaufgaben	257
19.5 Das NEWTONSche Verfahren bei Approximationsaufgaben . . .	260
§ 20. Monotonie und Extremalprinzipien beim NEWTONSchen Ver- fahren	264
20.1 Problemklasse, konvexe und konkave Operatoren	264
20.2 Monotonie beim NEWTONSchen Verfahren	266
20.3 Extremalprinzipien und Einschließungssatz	267
20.4 Beispiele nichtlinearer Randwertaufgaben	269
20.5 Konvergenzuntersuchung	270
20.6 Vermischte Aufgaben zu Kap. II	272
20.7 Hinweise zu den Lösungen	273

Kapitel III

Monotonie, Ungleichungen und weitere Gebiete

§ 21. Monotone Operatoren	275
21.1 Definition und Beispiele	275
21.2 Monoton zerlegbare Operatoren	277
21.3 Anwendung des SCHAUDERSchen Fixpunktsatzes	281

12.4 Anwendung des SCHAUDERSchen Satzes bei nichtlinearen Differentialgleichungen	282
12.5 Anwendung auf reelle lineare Gleichungssysteme	284
§ 22. Weitere Anwendungen des SCHAUDERSchen Satzes	286
22.1 Extrapolation mit Fehlerabschätzung bei einer monotonen Iterationsfolge	286
22.2 Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme	289
22.3 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	291
22.4 Ein weiterer Monotoniesatz	292
22.5 Anwendungen auf nichtlineare Integralgleichungen	294
§ 23. Monotone Art bei Matrizen und Randwertaufgaben	296
23.1 Matrizen monotoner Art	296
23.2 Monotone Art bei linearen Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen	300
23.3 Randmaximumsatz bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen	301
23.4 Monotone Art bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen	305
23.5 Spezialfall der linearen elliptischen Differentialgleichungen	307
§ 24. Anfangswertaufgaben und weitere Monotoniesätze	309
24.1 Strenge Monotonie bei parabolischen Gleichungen	309
24.2 Der allgemeine Monotoniesatz	310
24.3 Nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen	313
24.4 Majorisierung der GREENSchen Funktion und nichtlineare Randwertaufgaben	316
§ 25. Approximation von Funktionen	320
25.1 Problemstellungen bei Approximationsfragen	320
25.2 Lineare Approximation	323
25.3 Menge der Minimallösungen bei rationaler Approximation	324
25.4 Existenzsatz für rationale TSCHEBYSCHEFF-Approximation	325
25.5 Allgemeiner Einschließungssatz für die Minimalabweichung	327
25.6 Ein System von Ungleichungen	329
25.7 Anwendungen	331
25.8 Rationale T-Approximation und Eigenwertaufgaben	336
§ 26. Diskrete TSCHEBYSCHEFF-Approximation und Austauschverfahren	338
26.1 Die diskrete T-Approximation	338
26.2 Referenz und Referenzabweichung	339
26.3 Das Zentrum	341
26.4 Austauschverfahren	342
26.5 Vermischte Aufgaben zu Kap. III	344
26.6 Hinweise zu den Lösungen	347
Anhang: Zum SCHAUDERSchen Fixpunktsatz	
26.7 Hilfssätze über kompakte Mengen	350
26.8 Zwei Fassungen des SCHAUDERSchen Fixpunktsatzes	353
Literaturverzeichnis	356
Namenverzeichnis	363
Sachverzeichnis	366