

TABLE DES MATIERES

<u>QUELQUES NOTATIONS ET DEFINITIONS</u>	1
<u>I - RESUME DE LA THEORIE GENERALE DES PROCESSUS</u>	8
a - Les temps d'arrêt	9
b - Les martingales	12
c - Le théorème de projection	14
d - Les processus croissants	15
e - Projection prévisible duale d'un processus croissant	18
f - Quasi-continuité à gauche	21
<u>II - MARTINGALES, SEMIMARTINGALES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES</u>	26
1 - MARTINGALES ET SEMIMARTINGALES	26
a - Quelques espaces de martingales	26
b - Semimartingales	29
c - Partie "martingale continue" d'une semimartingale	32
d - Processus croissant associé à une semimartingale	33
e - Quelques inégalités	37
2 - INTEGRALES STOCHASTIQUES	41
a - Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale continue	42
b - Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale quelconque	44
c - Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale, le cas localement borné	46
d - La formule d'Ito	47
e - Compléments sur le processus des sauts d'une martingale locale	49
f - Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale, le cas général	52
g - Un théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques	56
3 - UN EXEMPLE: LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS	59
<u>III - MESURES ALEATOIRES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES</u>	66
1 - LES MESURES ALEATOIRES	66
a - Quelques définitions	66
b - La mesure de Doléans	68
c - Projection prévisible duale d'une mesure aléatoire	72
d - Mesures aléatoires à valeurs entières	74
e - Espérance conditionnelle par rapport à une mesure de Doléans positive	76
2 - TROIS EXEMPLES	80
a - Mesures aléatoires de Poisson	80
b - Processus ponctuels multivariés	83
c - Caractéristiques locales d'une semimartingale vectorielle	88
d - Les processus à accroissements indépendants	90
3 - L'INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A UNE MESURE ALEATOIRE	97
a - L'intégrale stochastique du premier type	98
b - L'intégrale stochastique du second type	101
4 - DECOMPOSITION D'UNE MARTINGALE SELON UNE MESURE ALEATOIRE	103
a - Décomposition d'une martingale locale	103

b - Intégrale stochastique optionnelle par rapport à une martingale locale	106
c - La formule d'Ito	109
IV - <u>SOUS-ESPACES STABLES DE MARTINGALES</u>	113
1 - LES PROPRIETES ELEMENTAIRES	113
a - Définition d'un sous-espace stable	113
b - Sous-espaces stables et orthogonalité	115
c - Une autre condition pour que $\mathcal{Z}^q(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^q$	119
d - Une comparaison de $\mathcal{H}^1$ et de $\mathcal{L}^1$	121
2 - LES SOUS-ESPACES STABLES DE $\mathcal{H}^2$	125
a - Le théorème de projection	125
b - Sous-espace stable engendré par une famille finie de martingales locales	127
c - Base d'un sous-espace stable	130
3 - SOUS-ESPACES STABLES ET MESURES ALEATOIRES	134
a - Sous-espaces stables engendrés par une mesure aléatoire	134
b - Tribu optionnelle, tribu prévisible, martingales, mesures aléatoires	137
c - Un théorème de projection pour les intégrales optionnelles	141
4 - LES FAMILLES FINIES DE MARTINGALES LOCALES	142
a - Le sous-espace stable $\mathcal{Z}^q(\mathcal{M})$	142
b - Systèmes générateurs d'un sous-espace stable	147
c - Dimension d'un sous-espace stable	149
d - La propriété de représentation prévisible	152
V - <u>COMPLEMENTS SUR LES SEMIMARTINGALES</u>	158
1 - PROCESSUS DEFINIS SUR UN INTERVALLE STOCHASTIQUE	158
a - Restriction d'un processus	158
b - Extension d'un processus	161
2 - INTEGRABILITE UNIFORME DES MARTINGALES LOCALES	163
3 - COMPORTEMENT A L'INFINI DES MARTINGALES LOCALES	165
a - Un résultat général sur les sousmartingales locales	165
b - Application aux martingales locales	168
4 - VARIATION QUADRATIQUE DES SEMIMARTINGALES	171
5 - QUASIMARTINGALES	174
6 - TEMPS LOCAUX	180
a - Calcul stochastique dépendant d'un paramètre	180
b - Temps local d'une semimartingale	183
c - La formule d'Ito pour les fonctions convexes	186
VI - <u>FORMULES EXPONENTIELLES ET DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES</u>	190
1 - L'EXPONENTIELLE D'UNE SEMIMARTINGALE	190
a - Définition et propriétés de l'exponentielle	190
b - Une généralisation de l'exponentielle	193
c - Une autre équation différentielle stochastique	196
2 - DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES	199
a - Un cas particulier	199
b - Projection prévisible d'une semimartingale spéciale	202
c - Décomposition multiplicative: le cas général	204
d - Un exemple de décomposition multiplicative	206

VII - CHANGEMENTS DE PROBABILITE	211
1 - COMPARAISON DE DEUX PROBABILITES	211
a - Le processus densité	211
b - Comparaison des propriétés de Z et Q	215
c - Quelques questions de mesurabilité	217
2 - CHANGEMENT ABSOLUMENT CONTINU DE PROBABILITE	222
a - Préliminaires	222
b - Le théorème de Girsanov	224
c - Quelques compléments au théorème de Girsanov	228
d - Les mesures aléatoires	231
e - Une application: convexité des lois de semimartingales	235
3 - CHANGEMENT QUELCONQUE DE PROBABILITE	238
a - Préliminaires	238
b - Extension du théorème de Girsanov	240
c - Quelques compléments	242
VIII - CONDITIONS POUR L'ABSOLUE CONTINUITE	249
1 - COMPORTEMENT A L'INFINI	250
a - Préliminaires	250
b - Convergence de Z vers 0	252
c - Convergence de Z vers l'infini	256
2 - CONDITIONS D'UNIFORME INTEGRABILITE	261
a - Critères prévisibles bornés	262
b - Un exemple: les processus ponctuels multivariés	265
c - Un critère prévisible intégrable	269
d - Un critère optionnel intégrable	273
IX - CHANGEMENTS DE FILTRATION	278
1 - INTEGRALES STOCHASTIQUES ET SEMIMARTINGALES	278
2 - RESTRICTION DE LA FILTRATION	284
a - Stabilité des martingales, surmartingales, quasimartingales	285
b - Stabilité des semimartingales	287
c - La condition $\underline{M}(\underline{G}) \subset \underline{M}(\underline{F})$	291
3 - GROSSISSEMENT DE LA FILTRATION	295
a - Introduction	295
b - Grossissement de la filtration le long d'une suite de temps d'arrêt	297
c - Un résultat général	299
d - Grossissement de la filtration par adjonction de temps d'arrêt	300
e - $\underline{G}$ -décomposition canonique d'une $\underline{F}$ -martingale	304
X - CHANGEMENTS DE TEMPS ET CHANGEMENTS D'ESPACE	311
1 - CHANGEMENTS DE TEMPS	311
a - Définitions et propriétés élémentaires	311
b - Processus adaptés à un changement de temps	315
c - Mesures aléatoires	321
d - Deux exemples	325
2 - CHANGEMENT D'ESPACE	328
a - Espace image	328
b - Espaces produit	332
c - Une application	334

<u>XI - SOLUTIONS EXTREMALES D'UN PREMIER PROBLEME DE MARTINGALES</u>	337
1 - CARACTERISATION DES SOLUTIONS EXTREMALES	337
a - Le théorème principal	337
b - Une autre démonstration du théorème principal	340
c - Convexité de l'ensemble $M(\mathbb{X})$	342
2 - APPLICATIONS ET EXTENSIONS	347
a - La propriété de représentation prévisible: deux exemples	347
b - Propriété de représentation prévisible et changements de temps	349
c - Le cas où $\mathbb{X}$ n'a qu'un seul élément	351
d - Un problème de sousmartingales	353
e - Martingale locale de crochet donné	357
<u>XII - UN SECOND PROBLEME DE MARTINGALES</u>	362
1 - POSITION DU PROBLEME	362
a - Enoncé du problème	362
b - Caractéristiques locales de semimartingales et problèmes de martingales	366
c - Changement absolument continu de probabilité	368
2 - LES SOLUTIONS EXTREMALES	372
a - Caractérisation des solutions extrémales	372
b - La propriété de représentation prévisible; exemple: les PAI	374
c - Une autre démonstration de (12.21)	377
3 - CONDITIONS D'ABSOLUE CONTINUITE	379
a - Position du problème	379
b - Quelques conditions nécessaires	381
c - Le processus densité	383
d - Utilisation de l'unicité	387
e - Utilisation de l'unicité locale	388
4 - PROBLEMES DE MARTINGALES ET ESPACES CANONIQUES	394
a - Image d'un problème sur l'espace canonique	395
b - Un critère d'unicité locale	397
<u>XIII - PROBLEMES DE MARTINGALES : QUELQUES EXEMPLES</u>	406
1 - PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS	406
a - Conditions d'absolue continuité	406
b - Une application de la propriété de représentation des martingales	410
c - Isomorphisme des flots de PAIS	412
2 - PROCESSUS DE MARKOV ET PROBLEMES DE MARTINGALES	418
a - Un théorème général de représentation des martingales	418
b - Rappels sur les processus de Markov	421
c - Représentation des martingales pour les processus de Markov	422
d - Un problème de martingales	424
3 - PROCESSUS DE DIFFUSION	433
a - Processus de diffusion et problèmes de martingales	433
b - Unicité pour les diffusions	437
c - Exemples de non-unicité	440
<u>XIV - EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES ET PROBLEMES DE MARTINGALES</u>	447
1 - SOLUTIONS FORTES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES	448
a - Introduction	448
b - Un critère d'existence et d'unicité	451

c - Un critère de non-explosion	457
d - Application: une équation avec semimartingale directrice	459
2 - COMPLEMENTS SUR LES ESPACES CANONIQUES	463
3 - MARTINGALES CONTINUES ET MOUVEMENT BROWNIEN	466
4 - MESURES ALEATOIRES A VALEURS ENTIERES ET MESURES DE POISSON	469
a - Quelques résultats auxiliaires	469
b - Transformation d'une mesure aléatoire à valeurs entières	471
c - Application aux semimartingales	476
5 - SOLUTIONS FAIBLES ET PROBLEMES DE MARTINGALES	479
a - Les divers types de solutions	480
b - Solutions faibles et problèmes de martingales	481
c - Réalisation d'une solution faible; solutions fortes-mesure	485
d - L'unicité trajectorielle	489
 <u>XV - REPRESENTATION INTEGRALE DES SOLUTIONS DES PROBLEMES DE MARTINGALES</u>	 495
1 - EXISTENCE DES REPRESENTATIONS INTEGRALES	495
a - Enoncé des résultats principaux	495
b - Utilisation du théorème fondamental	499
c - Démonstration du théorème fondamental	503
2 - NON-UNICITE DES REPRESENTATIONS INTEGRALES	510
a - Structure des combinaisons convexes de deux éléments de $M_e(\mathbb{R})$	510
b - Non-unicité de la représentation intégrale	513
 <u>INDEX TERMINOLOGIQUE</u>	 518
 <u>INDEX DES NOTATIONS</u>	 524
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	 527