Inhalt

Vorwort III

I. Mengen 1

A. Definitionen 1
B. Zahlenmengen 6
1. Die Menge der rationalen Zahlen 6
2. Die Menge der reellen Zahlen 9
3. Die Menge der komplexen Zahlen 10

II. Symmetriegruppen 24

A. Der Begriff der Gruppe 24
1. Definition einer Gruppe 24
2. Gruppeneigenschaften 25
3. Abelsche Gruppen. Zyklische Gruppen 27
4. Untergruppen 28
5. Direktes Produkt 31
B. Die Symmetriegruppen der Moleküle 32
1. Symmetrieoperationen (Deckoperationen) 32
2. Die Drehsymmetriegruppen der Moleküle 35
a) Definition der Drehsymmetriegruppe 35
b) Die wichtigsten Drehsymmetriegruppen der Moleküle 37
3. Symmetrieelemente 46
a) Drehachsen 46
b) Spiegelungsebenen 47
c) Drehspiegelungsachsen (uneigentliche Drehachsen) 49
4. Moleküle mit Inversionszentrum 51
5. Definition der Symmetriegruppe 53
6. Die Symmetriegruppen der Moleküle mit Inversionszentrum . . . 55
7. Symmetrieelemente, Symmetrieoperationen und Symmetriegruppen der Moleküle 57
a) Moleküle mit einer einzigen Drehachse C_n 58
b) Moleküle mit einer vertikalen Hauptdrehachse C_n und n horizontalen 2-zähligen Drehachsen 61
c) Die Symmetriegruppe T_d des regulären Tetraeders 66
d) Die Symmetriegruppe O_h des regulären Oktaeders 66

III. Elemente der Kombinatorik 68

A. Permutationen 68
B. Kombinationen 72
C. Variationen 75
D. Entwicklungsformel für das allgemeine Binom $(x + y)^n$ 77

IV. Polynome und ihre algebraischen Eigenschaften 79

V. Vektoralgebra 86

A. Der n-dimensionale affine Raum R^n 86
B. Der Vektorbegriff im n-dimensionalen affinen Raum R^n 87
1. Der Vektorbegriff im affinen R^3 87
2. Der Vektorbegriff im affinen R^n 92
C. Lineare Unabhängigkeit von Vektoren 95
D. Lineare Vektorräume und lineare Räume 97
E. Der n-dimensionale affine Raum R^n mit Euklidischer Maßbestimmung 102
1. Der metrische Raum 102
2. Der Euklidische oder kartesische Raum 102
a) Definition des Euklidischen Raumes 102
b) Orthonormierte Basen 104
3. Geometrische Deutung des 3-dimensionalen Euklidischen Raumes 107
a) Geometrische Deutung des Skalarproduktes und der Orthogonalität zweier Vektoren 107
b) Das vektorielle Produkt zweier Vektoren im Euklidischen R^3 . 108
F. Der komplexe n-dimensionale Vektorraum $V_n(K)$ 111

VI. Elemente der linearen Algebra 113

A. Der Matrizenkalkül 113
1. Definition einer Matrix 113
2. Addition von Matrizen 116
3. Multiplikation von Matrizen 118
4. Quadratische Matrizen 122
a) Rang einer Matrix 122
b) Rechengesetze 124
c) Spezielle quadratische Matrizen 125
B. Determinantentheorie 127
1. Definition einer Determinante n-ter Ordnung 127
2. Der Laplacesche Entwicklungssatz 130
3. Eigenschaften der Determinanten n-ter Ordnung 134
C. Anwendungen der Determinantentheorie 142
1. Lineare Unabhängigkeit von Vektoren 142
2. Lineare Gleichungssysteme 144
a) Definition eines linearen Gleichungssystems 144
b) Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme 146
c) Homogene lineare Gleichungssysteme 148
d) Inhomogene lineare Gleichungssysteme 152
3. Berechnung inverser Matrizen 159
D. Lineare Transformationen 160
1. Definition und Eigenschaften einer linearen Transformation . . . 160
2. Darstellung einer linearen Transformation durch eine Matrix . . . 162
3. Koordinatentransformation (Basistransformation) 164

E. Matrixeigenwertprobleme 167
1. Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix 167
2. Invariante Größen einer linearen Transformation 171
3. Eigenwertproblem reeller symmetrischer Matrizen 172

VII. Funktionen einer Veränderlichen 176

A. Der Funktionsbegriff 176
1. Definition einer Funktion 176
2. Darstellung einer Funktion 176
3. Grundbegriffe 178
4. Funktionstypen 179
a) Algebraische Funktionen 179
b) Transzendente Funktionen 180
B. Der Begriff der Stetigkeit 182
1. Grenzwert einer reellen Zahlenfolge 182
2. Grenzwert einer Funktion 183
3. Definition der Stetigkeit 184
4. Allgemeine Sätze über stetige Funktionen 186
C. Der Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion 188
1. Tangentenproblem und Differenzierbarkeit 188
2. Allgemeine Differentiationsregeln 191
3. Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 194
4. Differentiale und Ableitungen höherer Ordnung 195
5. Mittelwertsatz der Differentialrechnung 197
D. Die Integration von Funktionen 198
1. Das bestimmte Integral als Flächeninhalt 198
2. Analytische Definition des bestimmten Integrals 201
3. Allgemeine Integrationsregeln 202
4. Das unbestimmte Integral 204
5. Stammfunktionen 206
6. Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung von Stammfunktionen 209
7. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 209
8. Die Produktintegration oder partielle Integration 210
9. Integration gebrochen rationaler Funktionen 211
a) Partialbruchzerlegung 211
b) Durchführung der Integration 214
10. Uneigentliche Integrale 216
a) Integration von Funktionen mit Sprungstellen im Integrationsintervall 216
b) Integration von Funktionen mit Polstellen im Integrationsintervall 217
c) Integration bei unendlichem Integrationsintervall 219
11. Flächenberechnung 219
E. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen 221
1. Potenzreihen 221
2. Taylor-Entwicklung von Funktionen 224
F. Kurvendiskussion 230

VIII. Funktionen mehrerer Veränderlicher 235

A. Der Funktionsbegriff 235
1. Definition einer Funktion von zwei und mehreren Veränderlichen 235
2. Darstellung einer Funktion 236
B. Der Begriff der Stetigkeit 238
1. Grenzwert einer Funktion 238
2. Definition der Stetigkeit 240
C. Der Begriff der Differenzierbarkeit 241
1. Partielle Ableitungen 1. Ordnung und ihre geometrische Deutung. 241
2. Partielle Ableitungen höherer Ordnung 243
3. Differenzierbarkeit und ihre geometrische Deutung 244
4. Die totale Ableitung einer Funktion 245
5. Das totale Differential einer Funktion 247
D. Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher 249
1. Parameterabhängige Integrale und ihre Eigenschaften 249
a) Stetigkeit des Integrals $g(x) = \int_a^\beta f(x, y)\,dy$ 249
b) Differenzierbarkeit des Integrals $g(x) = \int_a^\beta f(x, y)\,dy$ 250
c) Doppelintegrale (zweifache Integrale). Mehrfache Integrale . . 252
2. Bereichsintegrale 253
a) Das Bereichsintegral als Volumen 253
b) Analytische Definition des Bereichsintegrals 255
c) Integrationsregeln 256
d) Darstellung des Bereichsintegrals durch ein mehrfaches Integral 256
e) Transformation der Bereichsintegrale 258
f) Anwendungsbeispiele 262
3. Kurvenintegrale 264
a) Definition des Kurvenintegrals in der Ebene 264
b) Definition des Kurvenintegrals im Raum 266
c) Integrationsregeln 267
d) Kurvenintegrale für Gradientenfelder 268
e) Hauptsatz über Kurvenintegrale 270
E. Taylor-Entwicklung 275
F. Extremwerte (relative Maxima und Minima) 277
1. Definition der Extremwerte 277
2. Extremwerte ohne Nebenbedingungen 277
3. Extremwerte mit Nebenbedingungen 279

IX. Gewöhnliche Differentialgleichungen 283

A. Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Grundbegriffe 283
B. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung 286
1. Geometrische Deutung 286
2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen für Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(x, y)$ 288
3. Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen 292

4. Lineare Differentialgleichungen 295
a) Lösung der homogenen Gleichung $y' = g(x) \cdot y$ 295
b) Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = g(x) \cdot y + h(x)$ . . . 296
5. Exakte Differentialgleichungen 297
C. Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . 301
1. Eigenschaften einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung . 301
2. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 306
3. Lösungsansätze in Form von Potenzreihen 311
D. Systeme linearer Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 312
1. Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 312
2. Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, behandelt am Beispiel des linearen Zweiteilchen-Vibrators 325
E. Randwertprobleme 330
F. Eigenwertprobleme 332

Register 335