

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	5
Symbole und Benennungen	13
1 Relevante Begriffe der Algebra	17
1.1 Elemente der Mengenalgebra	17
• Axiome der Mengenlehre • Diskussion des Auswahlaxioms • Gesetze der Mengenalgebra • Eigenschaften der symmetrischen Differenz •	
• Der Begriff des Komplements einer Menge • σ -additive und σ -multiplikative Mengenfamilien • Partiiell geordnete Mengen •	
1.2 Begriffe der abstrakten Algebra	30
• Algebra • Unter algebra • Morphismen und ihre Klassifizierung •	
• Verbände • Dualitätsprinzip der Verbandstheorie • Distributive Verbände • Modulare Verbände •	
1.3 Boolesche und Postsche Algebren	42
• Axiome und Eigenschaften der Booleschen Algebra • Einige Sätze der Booleschen Algebra • Boolesche Quotientenalgebra • Axiome und Eigenschaften der Postschen Algebra •	
2 Sinn von und Umgang mit mathematisch-logischen Symbolen und Begriffen	51
2.1 Zeichen und Ausdrücke der mathematischen Sprache	51
• Subjekt • Prädikat • Funktor • Ausdruck • Term • Formel •	
• Wichtigere logische Gesetze •	
2.2 Ansätze zur Formalisierung von mathematischen Sprachen	57
2.3 Deduktive Methodik	60
• Mathematische Theorien • Modelle • Beweise •	

3	Elemente des Aussagenkalküls und ihre Anwendung in mathematischen Beweisen	65
3.1	Vollständige Wahrheitstabeln	65
3.2	Der Begriff des Aussagenkalkül-Gesetzes	70
	• Identitätsgesetz für Äquivalenzen • Identitätsgesetz für Implikationen • tertium-non-datur • Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs • Tautologie der abgeschlossenen Systeme von Theoremen •	
3.3	Regeln des Aussagenkalküls	74
	• Substitutionsregel • modus ponens • modus tollens • Exhaustionseffekt • reductio ad absurdum • Äquivalenz von Aussagen und zugehörige Abtrennregeln • Das logische Quadrat • Die Regeln des bedingten Syllogismus • Schlußregeln mit Konjunktion und Alternative • Simplifikationsregeln • Apagogische Beweise •	
3.4	Wichtigere Gesetze des Aussagenkalküls und ihre Anwendung	87
	• Gesetze (14) • Äquivalenzen (16) •	
3.5	Bemerkungen über 3-wertige Logiken	90
4	Axiomatisierung der m-wertigen ($m \geq 2$) Aussagenkalküle	93
4.1	Eigenschaften deduktiver Disziplinen	93
4.2	Axiomatische Fassung des klassischen (2-wertigen) Aussagenkalküls . .	97
4.3	Axiomatische Fassung der m-wertigen ($m > 2$) Aussagenkalküle	102
5	Elemente des Funktionenkalküls und ihre Anwendung	107
5.1	Quantoren und Aussagefunktionen von mehreren Variablen	107
5.2	Gesetze des Funktionenkalküls	111
	• Wichtigere Gesetze: dictum de omni, De Morgansche u.a. Gesetze • Äquivalenzen • Regeln zur Einführung und Beseitigung von Quantoren • Distributivitätsgesetze für Quantoren • Gesetze für Umbenennung und Umstellung von Quantoren •	
5.3	Schlußregeln des Funktionenkalküls	121
5.4	Anwendung des Funktionenkalküls in mathematischen Beweisen	124
6	Formalisierte deduktive Systeme und Theorien	127
6.1	Formalisierung der Sprache in elementaren Theorien	128
	• Sprache 0. und 1. Ordnung • Interpretierung der Sprache • Algebra der formalisierten Sprachen •	

6.2	Intuitiver Begriff der Tautologie.	138
	• Aussagentautologien • Prädikantautologien •	
6.3	Axiomatik und Logik formalisierter Theorien.	143
	• Schlußregeln • Formale Beweise • Konsequenzoperationen • Der allgemeine Begriff der Logik: Klassische und nichtklassische Logiken •	
6.4	Einige metamathematische Begriffe.	150
	• Widerspruchsfreiheit • Vollständigkeit • Entscheidbarkeit •	
7	Logische Aspekte der Quantenmechanik	155
7.1	Mechanische Systeme und ihre Abstraktion	155
	• Der Phasenraum • Kanonische Gleichungen • Hamiltonsche Funktion • Poissonsche Klammern • Fundamentale Quantengleichun- gen • Übergang zur Quantenlogik •	
7.2	Vom Diracschen Superpositionsprinzip zur Quantenlogik	160
	• Die Birkhoff-v. Neumann-Quantenlogik: Primitive Symbole, Axiome, Schlußregeln und logische Operationen der Quantenlogik •	
7.3	Mackey's Axiomatik	165
	• Quantenmechanisches Äquivalent des Phasenraumes • Maćzyński's Deutung des Axiomensystems von Mackey •	
8	Mathematische Maschinen, Programmstruktur und algorithmische Logik	177
8.1	Einfache Definition einer Rechenmaschine.	178
	• Die Pawlak-Maschine • Programmspeichernde Rechner • Halbpro- gramme und Programme •	
8.2	Programmablauf und -beschreibung.	185
	• Flußdiagramme • Markowscher Algorithmus • Programmbeschrei- bung •	
8.3	Systeme der algorithmischen Logik.	192
	• Strukturierung von Programmen in klassischer Logik • Strukturierung von Programmen in $m (> 2)$ -wertiger Logik • Axiomatisierung der algorithmischen Kalküle •	
	ANHANG	207
A	Maschinelles Beweisen von Theoremen	207
A.1	Ein mechanisches Beweisverfahren für den Aussagenkalkül	207

A.2 Das System von Ewa Orłowska	211
• Fundamentale Theorie • Beweissystem • Beweisprozeß • Beweisalgorithmus •	
B Prinzip der ein- und der mehrdimensionalen Induktion	224
B.1 Das Induktionsprinzip in der Arithmetik der natürlichen Zahlen	226
B.2 Anwendung des Induktionsprinzips in induktiven Beweisen	228
B.3 Die transfinite Induktion	229
B.4 Die mehrdimensionale Induktion	231
Schrifttum	235
Sachverzeichnis	241