

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

XXIII

1	Arithmetik	1
1.1	Elementare Rechenregeln	1
1.1.1	Zahlen	1
1.1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	1
1.1.1.2	Irrationale und transzendente Zahlen	1
1.1.1.3	Reelle Zahlen	2
1.1.2	Summen und Produkte	4
1.1.2.1	Summen	4
1.1.2.2	Produkte	4
1.1.3	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	5
1.1.4	Algebraische Ausdrücke	8
1.1.5	Ganzrationale Ausdrücke	9
1.1.6	Gebrochenrationale Ausdrücke	11
1.1.7	Irrationale Ausdrücke	14
1.2	Endliche Reihen	15
1.2.1	Arithmetische Reihen	15
1.2.2	Geometrische Reihe	16
1.2.3	Spezielle endliche Reihen	16
1.2.4	Mittelwerte	16
1.3	Finanzmathematik	18
1.3.1	Prozentrechnung	18
1.3.2	Zinseszinsrechnung	19
1.3.3	Tilgungsrechnung	20
1.3.4	Rentenrechnung	21
1.3.5	Abschreibungen	23
1.4	Ungleichungen	25
1.4.1	Reine Ungleichungen	25
1.4.2	Spezielle Ungleichungen	26
1.4.3	Auflösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades	29
1.5	Komplexe Zahlen	30
1.5.1	Imaginäre und komplexe Zahlen	30
1.5.2	Geometrische Veranschaulichung	31
1.5.3	Rechnen mit komplexen Zahlen	32
1.6	Algebraische und transzendente Gleichungen	34
1.6.1	Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform	34
1.6.2	Gleichungen 1. bis 4. Grades	36
1.6.3	Gleichungen n -ten Grades	39
1.6.4	Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische	41
2	Funktionen und ihre Darstellung	43
2.1	Funktionsbegriff	43
2.1.1	Definition der Funktion	43
2.1.2	Methoden zur Definition einer reellen Funktion	43
2.1.3	Einige Funktionstypen	44
2.1.4	Grenzwert von Funktionen	46
2.1.5	Stetigkeit einer Funktion	51
2.1.6	Elementare Funktionen	55

2.2	Polynome	56
2.3	Gebrochenrationale Funktionen	59
2.4	Irrationale Funktionen	63
2.5	Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen	65
2.6	Trigonometrische Funktionen	68
2.6.1	Grundlagen	68
2.6.1.1	Definition und Darstellung	68
2.6.1.2	Wertebereiche und Funktionsverläufe	70
2.6.2	Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen	72
2.6.3	Beschreibung von Schwingungen	75
2.7	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen)	77
2.8	Hyperbelfunktionen	80
2.8.1	Definition der Hyperbelfunktionen	80
2.8.2	Graphische Darstellung der Hyperbelfunktionen	81
2.8.3	Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen	82
2.9	Areafunktionen	84
2.10	Kurven dritter Ordnung	86
2.11	Kurven vierter Ordnung	88
2.12	Zykloiden	92
2.13	Spiralen	96
2.14	Verschiedene andere Kurven	98
2.15	Aufstellung empirischer Kurven	99
2.15.1	Verfahrensweise	99
2.15.2	Gebräuchlichste empirische Formeln	100
2.16	Funktionen von mehreren Veränderlichen	106
2.16.1	Definition und Darstellung	106
2.16.2	Verschiedene ebene Definitionsbereiche	107
2.16.3	Grenzwerte	111
2.16.4	Stetigkeit	112
2.16.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	112

3 Geometrie 113

3.1	Planimetrie	113
3.1.1	Grundbegriffe	113
3.1.1.1	Punkt, Gerade, Strahl, Strecke	113
3.1.1.2	Winkel	113
3.1.1.3	Winkel an zwei sich schneidenden Geraden	114
3.1.1.4	Winkelpaare an geschnittenen Parallelen	114
3.1.1.5	Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß	115
3.1.2	Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen	116
3.1.2.1	Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen	116
3.1.2.2	Geometrische Definition der Hyperbelfunktionen	116
3.1.3	Ebene Dreiecke	117
3.1.3.1	Aussagen zu ebenen Dreiecken	117
3.1.3.2	Symmetrie	118
3.1.4	Ebene Vierecke	119
3.1.4.1	Parallelogramm	119
3.1.4.2	Rechteck und Quadrat	120
3.1.4.3	Rhombus	120
3.1.4.4	Trapez	120
3.1.4.5	Allgemeines Viereck	120
3.1.5	Ebene Vielecke	121

3.1.6	Ebene Kreisfiguren	122
3.1.6.1	Kreis	122
3.1.6.2	Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisausschnitt (Kreissektor)	122
3.1.6.3	Kreisring	123
3.2	Ebene Trigonometrie	124
3.2.1	Dreiecksberechnungen	124
3.2.1.1	Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken	124
3.2.1.2	Berechnungen in schiefwinkligen ebenen Dreiecken	124
3.2.2	Geodätische Anwendungen	127
3.2.2.1	Geodätische Koordinaten	127
3.2.2.2	Winkel in der Geodäsie	128
3.2.2.3	Vermessungstechnische Anwendungen	130
3.3	Stereometrie	134
3.3.1	Geraden und Ebenen im Raum	134
3.3.2	Kanten, Ecken, Raumwinkel	134
3.3.3	Polyeder	135
3.3.4	Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind	138
3.4	Sphärische Trigonometrie	142
3.4.1	Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel	142
3.4.1.1	Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel	142
3.4.1.2	Spezielle Koordinatensysteme	144
3.4.1.3	Sphärisches Zweieck	145
3.4.1.4	Sphärisches Dreieck	145
3.4.1.5	Polardreieck	146
3.4.1.6	Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke	146
3.4.1.7	Dreikant	147
3.4.2	Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke	147
3.4.2.1	Allgemeine Aussagen	147
3.4.2.2	Grundformeln und Anwendungen	148
3.4.2.3	Weitere Formeln	151
3.4.3	Berechnung sphärischer Dreiecke	152
3.4.3.1	Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen	152
3.4.3.2	Rechtwinklig sphärisches Dreieck	152
3.4.3.3	Schiefwinklig sphärisches Dreieck	154
3.4.3.4	Sphärische Kurven	158
3.5	Vektoralgebra und analytische Geometrie	164
3.5.1	Vektoralgebra	164
3.5.1.1	Definition des Vektors, Rechenregeln	164
3.5.1.2	Skalarprodukt und Vektorprodukt	167
3.5.1.3	Mehrfache multiplikative Verknüpfungen	169
3.5.1.4	Vektorielle Gleichungen	171
3.5.1.5	Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors	171
3.5.1.6	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra	173
3.5.2	Analytische Geometrie der Ebene	174
3.5.2.1	Grundlegende Begriffe und Formeln, ebene Koordinatensysteme	174
3.5.2.2	Gerade	178
3.5.2.3	Kreis	181
3.5.2.4	Ellipse	182
3.5.2.5	Hyperbel	184
3.5.2.6	Parabel	187
3.5.2.7	Kurven zweiter Ordnung (Kegelschnitte)	189
3.5.3	Analytische Geometrie des Raumes	192

	3.5.3.1	Grundlegende Begriffe und Formeln, räumliche Koordinatensysteme	192
	3.5.3.2	Gerade und Ebene im Raum	199
	3.5.3.3	Flächen zweiter Ordnung, Gleichungen in Normalform	202
	3.5.3.4	Flächen zweiter Ordnung, allgemeine Theorie	209
3.6		Differentialgeometrie	210
	3.6.1	Ebene Kurven	211
	3.6.1.1	Möglichkeiten, eine ebene Kurve zu definieren	211
	3.6.1.2	Lokale Elemente einer Kurve	211
	3.6.1.3	Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten	216
	3.6.1.4	Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung	221
	3.6.1.5	Evoluten und Evoluten	222
	3.6.1.6	Einhüllende von Kurvenscharen	223
	3.6.2	Raumkurven	224
	3.6.2.1	Möglichkeiten, eine Raumkurve zu definieren	224
	3.6.2.2	Begleitendes Dreiein	224
	3.6.2.3	Krümmung und Windung	227
	3.6.3	Flächen	229
	3.6.3.1	Möglichkeiten, eine Fläche zu definieren	229
	3.6.3.2	Tangentialebene und Flächennormale	229
	3.6.3.3	Linielement auf einer Fläche	231
	3.6.3.4	Krümmung einer Fläche	233
	3.6.3.5	Regelflächen und abwickelbare Flächen	235
	3.6.3.6	Geodätische Linien auf einer Fläche	236
4		Lineare Algebra	237
4.1		Matrizen	237
	4.1.1	Begriff der Matrix	237
	4.1.2	Quadratische Matrizen	238
	4.1.3	Vektoren	239
	4.1.4	Rechenoperationen mit Matrizen	240
	4.1.5	Rechenregeln für Matrizen	243
4.2		Determinanten	244
	4.2.1	Definitionen	244
	4.2.2	Rechenregeln für Determinanten	245
	4.2.3	Berechnung von Determinanten	246
4.3		Tensoren	246
	4.3.1	Transformation des Koordinatensystems	246
	4.3.2	Tensoren in kartesischen Koordinaten	247
	4.3.3	Tensoren mit speziellen Eigenschaften	249
	4.3.3.1	Tensoren 2. Stufe	249
	4.3.3.2	Invariante Tensoren	250
	4.3.4	Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen	251
	4.3.4.1	Kovariante und kontravariante Basisvektoren	251
	4.3.4.2	Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe	251
	4.3.4.3	Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe	252
	4.3.4.4	Rechenregeln	253
	4.3.5	Pseudotensoren	253
	4.3.5.1	Punktspiegelung am Koordinatenursprung	253
	4.3.5.2	Einführung des Begriffs des Pseudotensors	254
4.4		Lineare Gleichungssysteme	255
	4.4.1	Lineare Systeme, Austauschverfahren	255

4.4.1.1	Lineare Systeme	255
4.4.1.2	Austauschverfahren	256
4.4.1.3	Lineare Abhängigkeiten	256
4.4.1.4	Invertierung einer Matrix	257
4.4.2	Lösung linearer Gleichungssysteme	257
4.4.2.1	Definition und Lösbarkeit	257
4.4.2.2	Anwendung des Austauschverfahrens	258
4.4.2.3	Cramersche Regel	259
4.4.2.4	Gaußscher Algorithmus	260
4.4.3	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	261
4.4.3.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmit- telprobleme	261
4.4.3.2	Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme	262
4.5	Eigenwertaufgaben bei Matrizen	262
4.5.1	Allgemeines Eigenwertproblem	262
4.5.2	Spezielles Eigenwertproblem	263
4.5.2.1	Charakteristisches Polynom	263
4.5.2.2	Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen	264
4.5.2.3	Hauptachsentransformation quadratischer Formen	265
4.5.2.4	Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten	266
4.5.3	Singulärwertzerlegung	266
5	Algebra und Diskrete Mathematik	268
5.1	Logik	268
5.1.1	Aussagenlogik	268
5.1.2	Ausdrücke der Prädikatenlogik	271
5.2	Mengenlehre	272
5.2.1	Mengenbegriff, spezielle Mengen	272
5.2.2	Operationen mit Mengen	273
5.2.3	Relationen und Abbildungen	275
5.2.4	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	277
5.2.5	Mächtigkeit von Mengen	278
5.3	Klassische algebraische Strukturen	279
5.3.1	Operationen	279
5.3.2	Halbgruppen	279
5.3.3	Gruppen	279
5.3.3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	279
5.3.3.2	Untergruppen und direkte Produkte	281
5.3.3.3	Abbildungen zwischen Gruppen	282
5.3.3.4	Anwendungsbeispiele	283
5.3.4	Ringe und Körper	286
5.3.5	Vektorräume	287
5.4	Elementare Zahlentheorie	290
5.4.1	Teilbarkeit	290
5.4.2	Lineare Diophantische Gleichungen	295
5.4.3	Kongruenzen und Restklassen	296
5.4.4	Sätze von Fermat, Euler und Wilson	300
5.4.5	Codes	301
5.5	Universelle Algebra	304
5.6	Boolesche Algebren und Schaltalgebra	306
5.7	Algorithmen der Graphentheorie	311
5.7.1	Grundbegriffe und Bezeichnungen	311

5.7.2	Durchlaufungen von ungerichteten Graphen	314
5.7.2.1	Kantenfolgen	314
5.7.2.2	Eulersche Linien	315
5.7.2.3	Hamilton-Kreise	316
5.7.3	Bäume und Gerüste	317
5.7.3.1	Bäume	317
5.7.3.2	Gerüste	318
5.7.4	Matchings	319
5.7.5	Planare Graphen	320
5.7.6	Bahnen in gerichteten Graphen	320
5.7.7	Transportnetze	322
5.8	Fuzzy Logik	324
5.8.1	Grundlagen der Fuzzy-Logik	324
5.8.1.1	Interpretation von Fuzzy-Mengen (Unscharfe Mengen)	324
5.8.1.2	Zugehörigkeitsfunktionen	325
5.8.1.3	Fuzzy-Mengen	327
5.8.2	Verknüpfungen unscharfer Mengen	328
5.8.2.1	Konzept für eine Verknüpfung (Aggregation) unscharfer Mengen	328
5.8.2.2	Praktische Verknüpfungen unscharfer Mengen	329
5.8.2.3	Kompensatorische Operatoren	332
5.8.2.4	Erweiterungsprinzip	332
5.8.2.5	Unscharfe Komplementfunktion	332
5.8.3	Fuzzy-wertige Relationen	333
5.8.3.1	Fuzzy Relationen	333
5.8.3.2	Fuzzy Relationenprodukt $R \circ S$	335
5.8.4	Fuzzy-Inferenz	336
5.8.5	Defuzzifizierungsmethoden	337
5.8.6	Wissensbasierte Fuzzy-Systeme	339
5.8.6.1	Methode MAMDANI	339
5.8.6.2	Methode SUGENO	339
5.8.6.3	Kognitive Systeme	340
5.8.6.4	Wissensbasiertes Interpolationssystem	342

6 Differentialrechnung 344

6.1	Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen	344
6.1.1	Differentialquotient	344
6.1.2	Differentiationsregeln für Funktionen einer Veränderlichen	345
6.1.2.1	Ableitungen elementarer Funktionen	345
6.1.2.2	Grundregeln für das Differenzieren	345
6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung	348
6.1.3.1	Definition der Ableitungen höherer Ordnung	348
6.1.3.2	Ableitungen höherer Ordnung der einfachsten Funktionen	349
6.1.3.3	Leibnizsche Regel	349
6.1.4	Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	350
6.1.5	Hauptsätze der Differentialrechnung	350
6.1.6	Bestimmung von Extremwerten	353
6.2	Differentiation von Funktionen von mehreren Veränderlichen	355
6.2.1	Partielle Ableitungen	355
6.2.2	Vollständiges Differential und Differentiale höherer Ordnung	357
6.2.3	Differentiationsregeln für Funktionen von mehreren Veränderlichen	358
6.2.4	Substitution von Variablen in Differentialausdrücken und Koordinatentransformationen	360

7 Unendliche Reihen 365

7.1	Zahlenfolgen	365
7.1.1	Eigenschaften von Zahlenfolgen	365
7.1.2	Grenzwerte von Zahlenfolgen	365
7.2	Reihen mit konstanten Gliedern	366
7.2.1	Allgemeine Konvergenzsätze	366
7.2.1.1	Definitionen	366
7.2.1.2	Allgemeine Sätze über die Konvergenz von Reihen	367
7.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern	368
7.2.2.1	Vergleichskriterium	368
7.2.2.2	Quotientenkriterium von d'Alembert	368
7.2.2.3	Wurzelkriterium von Cauchy	369
7.2.2.4	Integralkriterium von Cauchy	369
7.2.3	Absolute und bedingte Konvergenz	369
7.2.3.1	Definition	369
7.2.3.2	Eigenschaften absolut konvergenter Reihen	370
7.2.3.3	Alternierende Reihen	371
7.2.4	Einige spezielle Reihen	371
7.2.4.1	Summenwerte einiger Reihen mit konstanten Gliedern	371
7.2.4.2	Bernoullische und Eulersche Zahlen	372
7.2.5	Abschätzung des Reihenrestes	374
7.3	Funktionsreihen	374
7.3.1	Definitionen	374
7.3.2	Gleichmäßige Konvergenz	375
7.3.2.1	Definition, Satz von Weierstraß	375
7.3.2.2	Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen	376
7.3.3	Potenzreihen	376
7.3.3.1	Definition, Konvergenz	376
7.3.3.2	Rechnen mit Potenzreihen	377
7.3.3.3	Entwicklung in Potenzreihen (Taylor-Reihen)	378
7.3.4	Näherungsformeln	380
7.3.5	Asymptotische Potenzreihen	380
7.3.5.1	Asymptotische Gleichheit	380
7.3.5.2	Asymptotische Potenzreihen	380
7.4	Fourier Reihen	382
7.4.1	Trigonometrische Summe und Fourier-Reihe	382
7.4.1.1	Grundbegriffe	382
7.4.1.2	Wichtigste Eigenschaften von Fourier-Reihen	383
7.4.2	Koeffizientenbestimmung für symmetrische Funktionen	384
7.4.3	Koeffizientenbestimmung mit Hilfe numerischer Methoden	386
7.4.4	Fourier-Reihe und Fourier-Integral	386
7.4.5	Hinweise zur Tabelle einiger Fourier-Entwicklungen	386

8 Integralrechnung 388

8.1	Unbestimmtes Integral	388
8.1.1	Stammfunktion oder Integral	388
8.1.2	Integrationsregeln	389
8.1.3	Integration rationaler Funktionen	391
8.1.4	Integration irrationaler Funktionen	394
8.1.5	Integration trigonometrischer Funktionen	397

8.1.6	Integration weiterer transzendenter Funktionen	399
8.2	Bestimmte Integrale	400
8.2.1	Grundbegriffe, Regeln und Sätze	400
8.2.1.1	Definition und Existenz des bestimmten Integrals	400
8.2.1.2	Eigenschaften bestimmter Integrale	401
8.2.1.3	Berechnung bestimmter Integrale	404
8.2.2	Anwendungen bestimmter Integrale	406
8.2.2.1	Allgemeines Prinzip zur Anwendung des bestimmten Integrals	406
8.2.2.2	Anwendungen in der Geometrie	407
8.2.2.3	Anwendungen in Mechanik und Physik	409
8.2.3	Uneigentliche Integrale	411
8.2.4	Parameterintegrale	416
8.2.5	Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen	417
8.3	Kurvenintegrale	419
8.3.1	Kurvenintegrale erster Art	420
8.3.2	Kurvenintegrale zweiter Art	422
8.3.3	Kurvenintegral allgemeiner Art	423
8.3.4	Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Integrationsweg	425
8.4	Mehrfachintegrale	427
8.4.1	Doppelintegral	427
8.4.1.1	Begriff des Doppelintegrals	427
8.4.1.2	Berechnung des Doppelintegrals	428
8.4.1.3	Anwendungen von Doppelintegralen	431
8.4.2	Dreifachintegral	431
8.4.2.1	Begriff des Dreifachintegrals	431
8.4.2.2	Berechnung des Dreifachintegrals	431
8.4.2.3	Anwendungen von Mehrfachintegralen	434
8.5	Oberflächenintegrale	434
8.5.1	Oberflächenintegrale erster Art	434
8.5.1.1	Begriff des Oberflächenintegrals erster Art	434
8.5.1.2	Berechnung des Oberflächenintegrals erster Art	435
8.5.1.3	Anwendungen des Oberflächenintegrals erster Art	436
8.5.2	Oberflächenintegrale zweiter Art	436
8.5.2.1	Begriff des Oberflächenintegrals zweiter Art	436
8.5.2.2	Berechnung des Oberflächenintegrals zweiter Art	438
8.5.2.3	Eine Anwendung des Oberflächenintegrals	440
9	Differentialgleichungen	443
9.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen	443
9.1.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung	443
9.1.1.1	Existenzsatz, Richtungsfeld	443
9.1.1.2	Wichtige Integrationsmethoden	444
9.1.1.3	Implizite Differentialgleichungen	447
9.1.1.4	Singuläre Integrale und singuläre Punkte	448
9.1.1.5	Näherungsmethoden zur Integration von Differentialgleichungen 1. Ordnung	452
9.1.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen	453
9.1.2.1	Grundlegende Betrachtungen	453
9.1.2.2	Erniedrigung der Ordnung	455
9.1.2.3	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	456
9.1.2.4	Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	458

9.1.2.5	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	460
9.1.2.6	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	463
9.1.3	Randwertprobleme	469
9.1.3.1	Problemstellung	469
9.1.3.2	Haupteigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte	470
9.1.3.3	Entwicklung nach Eigenfunktionen	471
9.2	Partielle Differentialgleichungen	472
9.2.1	Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	472
9.2.1.1	Lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	472
9.2.1.2	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	474
9.2.2	Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	477
9.2.2.1	Klassifikation und Eigenschaften der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen	477
9.2.2.2	Klassifikation und Eigenschaften der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen	479
9.2.2.3	Integrationsmethoden für lin. part. Differentialgleichungen 2. Ordnung	480
9.2.3	Partielle Differentialgleichungen aus Naturwissenschaft und Technik	490
9.2.3.1	Problemstellungen und Randbedingungen	490
9.2.3.2	Wellengleichung	492
9.2.3.3	Wärmeleitungs- und Diffusionsgleichung für ein homogenes Medium	493
9.2.3.4	Potentialgleichung	494
9.2.3.5	Schrödinger Gleichung	494
9.2.4	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen, Solitonen	502
9.2.4.1	Physikalisch-mathematische Problemstellung	502
9.2.4.2	KORTEWEG-DE-VRIES-Gleichung	503
9.2.4.3	Nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung	505
9.2.4.4	Sinus-GORDON Gleichung	505
9.2.4.5	Weitere nichtlineare Evolutionsgleichungen mit Solitonlösungen	507
10	Variationsrechnung	508
10.1	Aufgabenstellung	508
10.2	Historische Aufgaben	509
10.2.1	Isoperimetrisches Problem	509
10.2.2	Brachistochronenproblem	509
10.3	Variationsaufgaben mit Funktionen einer Veränderlichen	509
10.3.1	Einfache Variationsaufgabe und Extremale	509
10.3.2	Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung	510
10.3.3	Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen	512
10.3.4	Variationsaufgaben mit höheren Ableitungen	513
10.3.5	Variationsaufgaben mit mehreren gesuchten Funktionen	513
10.3.6	Variationsaufgaben in Parameterdarstellung	514
10.4	Variationsaufgaben mit Funktionen von mehreren Veränderlichen	515
10.4.1	Einfache Variationsaufgabe	515
10.4.2	Allgemeinere Variationsaufgaben	516
10.5	Numerische Lösung von Variationsaufgaben	516
10.6	Ergänzungen	518
10.6.1	Erste und zweite Variation	518
10.6.2	Anwendungen in der Physik	518

11	Lineare Integralgleichungen	519
11.1	Einführung und Klassifikation	519
11.2	Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art	520
11.2.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen	520
11.2.2	Methode der sukzessiven Approximation, Neumann-Reihe	523
11.2.3	Fredholmsche Lösungsmethode, Fredholmsche Sätze	525
11.2.3.1	Fredholmsche Lösungsmethode	525
11.2.3.2	Fredholmsche Sätze	527
11.2.4	Numerische Verfahren für Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art	528
11.2.4.1	Approximation des Integrals	528
11.2.4.2	Kernapproximation	530
11.2.4.3	Kollokationsmethode	532
11.3	Fredholmsche Integralgleichungen 1. Art	533
11.3.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen	533
11.3.2	Begriffe, analytische Grundlagen	534
11.3.3	Zurückführung der Integralgleichung auf ein lineares Gleichungssystem	536
11.3.4	Lösung der homogenen Integralgleichung 1. Art	537
11.3.5	Konstruktion zweier spezieller Orthonormalsysteme zu einem gegebenen Kern	538
11.3.6	Iteratives Verfahren	540
11.4	Volterrasche Integralgleichungen	541
11.4.1	Theoretische Grundlagen	541
11.4.2	Lösung durch Differentiation	541
11.4.3	Neumannsche Reihe zur Lösung der Volterraschen Integralgleichungen 2. Art	542
11.4.4	Integralgleichungen vom Faltungstyp	543
11.4.5	Numerische Behandlung Volterrascher Integralgleichungen 2. Art	544
11.5	Singuläre Integralgleichungen	546
11.5.1	Abelsche Integralgleichung	546
11.5.2	Singuläre Integralgleichungen mit Cauchy-Kernen	547
11.5.2.1	Formulierung der Aufgabe	547
11.5.2.2	Existenz einer Lösung	548
11.5.2.3	Eigenschaften des Cauchy-Integrals	548
11.5.2.4	Hilbertsches Randwertproblem	548
11.5.2.5	Lösung des Hilbertschen Randwertproblems	549
11.5.2.6	Lösung der charakteristischen Integralgleichung	550
12	Funktionalanalysis	551
12.1	Vektorräume	551
12.1.1	Begriff des Vektorraumes	551
12.1.2	Lineare und affin-lineare Teilmengen	552
12.1.3	Linear unabhängige Elemente	553
12.1.4	Konvexe Teilmengen und konvexe Hülle	554
12.1.5	Lineare Operatoren und Funktionale	555
12.1.6	Komplexifizierung von reellen Vektorräumen	556
12.1.7	Geordnete Vektorräume	556
12.1.7.1	Kegel und Halbordnung	556
12.1.7.2	Ordnungsbeschränkte Mengen	557
12.1.7.3	Positive Operatoren	557
12.1.7.4	Vektorverbände	557
12.2	Metrische Räume	559
12.2.1	Begriff des metrischen Raumes	559
12.2.1.1	Kugeln und Umgebungen	560
12.2.1.2	Konvergenz von Folgen im metrischen Raum	560

	12.2.1.3	Abgeschlossene Mengen und Abschließung	561
	12.2.1.4	Dichte Teilmengen und separable metrische Räume	561
	12.2.2	Vollständige metrische Räume	562
	12.2.2.1	Einige fundamentale Sätze in vollständigen metrischen Räumen	562
	12.2.2.2	Einige Anwendungen des Kontraktionsprinzips	563
	12.2.2.3	Vervollständigung eines metrischen Raumes	564
	12.2.3	Stetige Operatoren	565
12.3		Normierte Räume	565
	12.3.1	Begriff des normierten Raumes	565
	12.3.2	Banach-Räume	566
	12.3.2.1	Reihen in normierten Räumen	566
	12.3.2.2	Beispiele von Banach-Räumen	566
	12.3.2.3	Sobolew-Räume	567
	12.3.3	Geordnete normierte Räume	567
	12.3.4	Normierte Algebren	567
12.4		Hilbert-Räume	568
	12.4.1	Begriff des Hilbert-Raumes	568
	12.4.1.1	Skalarprodukt	568
	12.4.1.2	Unitäre Räume und einige ihrer Eigenschaften	569
	12.4.1.3	Hilbert-Raum	569
	12.4.2	Orthogonalität	569
	12.4.2.1	Eigenschaften der Orthogonalität	570
	12.4.2.2	Orthogonale Systeme	570
	12.4.3	Fourier-Reihen im Hilbert-Raum	571
	12.4.4	Existenz einer Basis. Isomorphe Hilbert-Räume	572
12.5		Stetige lineare Operatoren und Funktionale	572
	12.5.1	Beschränktheit, Stetigkeit und Norm linearer Operatoren	572
	12.5.1.1	Raum linearer stetiger Operatoren	573
	12.5.1.2	Konvergenz von Operatorfolgen	573
	12.5.2	Lineare stetige Operatoren in Banach-Räumen	573
	12.5.3	Elemente der Spektraltheorie linearer Operatoren	575
	12.5.3.1	Resolventenmenge und Resolvente eines Operators	575
	12.5.3.2	Spektrum eines Operators	575
	12.5.4	Stetige lineare Funktionale	576
	12.5.4.1	Stetige lineare Funktionale im Hilbert-Raum, Satz von Riesz	577
	12.5.4.2	Stetige lineare Funktionale in L^p	577
	12.5.5	Fortsetzung von linearen Funktionalen	577
	12.5.6	Trennung konvexer Mengen	578
	12.5.7	Bidualer Raum und reflexive Räume	578
12.6		Adjungierte Operatoren in normierten Räumen	579
	12.6.1	Adjungierter Operator zu einem beschränkten Operator	579
	12.6.2	Adjungierter Operator zu einem unbeschränkten Operator	580
	12.6.3	Selbstadjungierte Operatoren	580
	12.6.3.1	Positiv definite Operatoren	580
	12.6.3.2	Projektoren im Hilbert-Raum	580
12.7		Kompakte Mengen und kompakte Operatoren	581
	12.7.1	Kompakte Teilmengen in normierten Räumen	581
	12.7.2	Kompakte Operatoren	581
	12.7.2.1	Begriff des kompakten Operators	581
	12.7.2.2	Eigenschaften linearer kompakter Operatoren	581
	12.7.2.3	Schwache Konvergenz von Elementen	581
	12.7.3	Fredholmsche Alternative	582

12.7.4	Kompakte Operatoren im Hilbert-Raum	582
12.7.5	Kompakte selbstadjungierte Operatoren	582
12.8	Nichtlineare Operatoren	583
12.8.1	Beispiele nichtlinearer Operatoren	583
12.8.2	Differenzierbarkeit nichtlinearer Operatoren	584
12.8.3	Newton-Verfahren	584
12.8.4	Schaudersches Fixpunktprinzip	585
12.8.5	Leray-Schauder-Theorie	585
12.8.6	Positive nichtlineare Operatoren	585
12.8.7	Monotone Operatoren in Banach-Räumen	586
12.9	Maß und Lebesgue-Integral	587
12.9.1	Sigma-Algebren und Maße	587
12.9.2	Meßbare Funktionen	588
12.9.3	Integration	588
12.9.4	L^p -Räume	590
12.9.5	Distributionen	590

3 Vektoranalysis und Feldtheorie 593

13.1	Grundbegriffe der Feldtheorie	593
13.1.1	Vektorfunktion einer skalaren Variablen	593
13.1.1.1	Definitionen	593
13.1.1.2	Ableitung einer Vektorfunktion	593
13.1.1.3	Differentiationsregeln für Vektoren	593
13.1.1.4	Taylor-Entwicklung für Vektorfunktionen	594
13.1.2	Skalarfelder	594
13.1.2.1	Skalares Feld oder skalare Punktfunktion	594
13.1.2.2	Wichtige Fälle skalarer Felder	594
13.1.2.3	Koordinatendarstellung von Skalarfeldern	594
13.1.2.4	Niveaulinien und Niveauflächen	595
13.1.3	Vektorfelder	595
13.1.3.1	Vektoriellcs Feld oder vektorielle Punktfunktion	595
13.1.3.2	Wichtige Fälle vektorieller Felder	596
13.1.3.3	Koordinatendarstellung von Vektorfeldern	597
13.1.3.4	Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen	598
13.1.3.5	Feldlinien	599
13.2	Räumliche Differentialoperationen	600
13.2.1	Richtungs- und Volumenableitung	600
13.2.1.1	Richtungsableitung eines skalaren Feldes	600
13.2.1.2	Richtungsableitung eines vektoriellen Feldes	600
13.2.1.3	Volumenableitung oder räumliche Ableitung	601
13.2.2	Gradient eines Skalarfeldes	601
13.2.2.1	Definition des Gradienten	601
13.2.2.2	Gradient und Richtungsableitung	601
13.2.2.3	Gradient und Volumenableitung	602
13.2.2.4	Weitere Eigenschaften des Gradienten	602
13.2.2.5	Gradient des Skalarfeldes in verschiedenen Koordinaten	602
13.2.2.6	Rechenregeln	602
13.2.3	Vektorgradient	603
13.2.4	Divergenz des Vektorfeldes	603
13.2.4.1	Definition der Divergenz	603
13.2.4.2	Divergenz in verschiedenen Koordinaten	604
13.2.4.3	Regeln zur Berechnung der Divergenz	604

13.2.4.4	Divergenz eines Zentralfeldes	604
13.2.5	Rotation des Vektorfeldes	605
13.2.5.1	Definitionen der Rotation	605
13.2.5.2	Rotation in verschiedenen Koordinaten	605
13.2.5.3	Regeln zur Berechnung der Rotation	606
13.2.5.4	Rotation des Potentialfeldes	606
13.2.6	Nabla-Operator, Laplace-Operator	607
13.2.6.1	Nablaoperator	607
13.2.6.2	Rechenregeln für den Nablaoperator	607
13.2.6.3	Vektorgradient	607
13.2.6.4	Zweifache Anwendung des Nablaoperators	608
13.2.6.5	Laplace-Operator	608
13.2.7	Übersicht zu den räumlichen Differentialoperationen	609
13.2.7.1	Vektoranalytische Ausdrücke in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten	609
13.2.7.2	Prinzipielle Verknüpfungen und Ergebnisse	610
13.2.7.3	Spezielle Rechenregeln	610
13.3	Integration in Vektorfeldern	610
13.3.1	Kurvenintegral und Potential im Vektorfeld	610
13.3.1.1	Kurvenintegral im Vektorfeld	610
13.3.1.2	Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik	611
13.3.1.3	Eigenschaften des Kurvenintegrals	612
13.3.1.4	Berechnung des Kurvenintegrals als Kurvenintegral 2. Gattung allgemeiner Art	612
13.3.1.5	Umlaufintegral eines Vektorfeldes	612
13.3.1.6	Konservatives oder Potentialfeld	613
13.3.2	Oberflächenintegrale	614
13.3.2.1	Vektor eines ebenen Flächenstückes	614
13.3.2.2	Berechnung von Oberflächenintegralen	614
13.3.2.3	Oberflächenintegrale und Fluß von Feldern	615
13.3.2.4	Berechnung von Oberflächenintegralen in kartesischen Koordinaten mit Hilfe von Oberflächenintegralen zweiter Art	615
13.3.3	Integralsätze	616
13.3.3.1	Integralsatz und Integralformel von Gauß	616
13.3.3.2	Integralsatz von Stokes	617
13.3.3.3	Integralsätze von Green	617
13.4	Berechnung von Feldern	618
13.4.1	Reines Quellenfeld	618
13.4.2	Reines Wirbelfeld oder quellenfreies Wirbelfeld	619
13.4.3	Vektorfelder mit punktförmigen Quellen	619
13.4.3.1	Coulomb-Feld der Punktladung	619
13.4.3.2	Gravitationsfeld der Punktmasse	620
13.4.4	Superposition von Feldern	620
13.4.4.1	Diskrete Quellenverteilung	620
13.4.4.2	Kontinuierliche Quellenverteilung	620
13.4.4.3	Zusammenfassung	620
13.5	Differentialgleichungen der Feldtheorie	620
13.5.1	Laplacesche Differentialgleichung	620
13.5.2	Poissonsche Differentialgleichung	621

14 Funktionentheorie	622
14.1 Funktionen einer komplexen Veränderlichen	622
14.1.1 Stetigkeit, Differenzierbarkeit	622
14.1.1.1 Definition der komplexen Funktion	622
14.1.1.2 Grenzwert der komplexen Funktion	622
14.1.1.3 Stetigkeit der komplexen Funktion	622
14.1.1.4 Differenzierbarkeit der komplexen Funktion	623
14.1.2 Analytische Funktionen	623
14.1.2.1 Definition der analytischen Funktion	623
14.1.2.2 Beispiele analytischer Funktionen	623
14.1.2.3 Eigenschaften analytischer Funktionen	624
14.1.2.4 Singuläre Punkte	624
14.1.3 Konforme Abbildung	625
14.1.3.1 Begriff und Eigenschaften der konformen Abbildung	625
14.1.3.2 Einfachste konforme Abbildungen	627
14.1.3.3 Schwarzsches Spiegelungsprinzip	632
14.1.3.4 Komplexe Potentiale	632
14.1.3.5 Superpositionsprinzip	634
14.2 Integration im Komplexen	636
14.2.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral	636
14.2.1.1 Definition des Integrals im Komplexen	636
14.2.1.2 Eigenschaften und Berechnung komplexer Integrale	636
14.2.2 Integralsatz von Cauchy	638
14.2.2.1 Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete	638
14.2.2.2 Integralsatz von Cauchy für mehrfach zusammenhängende Gebiete	638
14.2.3 Integralformeln von Cauchy	639
14.2.3.1 Analytische Funktion innerhalb eines Gebietes	639
14.2.3.2 Analytische Funktion außerhalb eines Gebietes	639
14.3 Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen	640
14.3.1 Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern	640
14.3.1.1 Konvergenz einer Zahlenfolge mit komplexen Gliedern	640
14.3.1.2 Konvergenz einer unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern	640
14.3.1.3 Potenzreihen im Komplexen	640
14.3.2 Taylor-Reihe	641
14.3.3 Prinzip der analytischen Fortsetzung	641
14.3.4 Laurent-Entwicklung	642
14.3.5 Isolierte singuläre Stellen und der Residuensatz	643
14.3.5.1 Isolierte singuläre Stellen	643
14.3.5.2 Meromorphe Funktionen	643
14.3.5.3 Elliptische Funktionen	643
14.3.5.4 Residuum	644
14.3.5.5 Residuensatz	644
14.3.6 Berechnung reeller Integrale mit Hilfe der Integration im Komplexen	645
14.3.6.1 Anwendung der Cauchyschen Integralformeln	645
14.3.6.2 Anwendung des Residuensatzes	645
14.3.6.3 Anwendungen des Lemmas von Jordan	645
14.3.7 Algebraische und elementare transzendente Funktionen	647
14.3.7.1 Algebraische Funktionen	647
14.3.7.2 Elementare transzendente Funktionen	648
14.3.7.3 Kurvengleichungen in komplexer Form	650
14.3.7.4 Abbildung der komplexen Zahlenebene	650
14.4 Elliptische Funktionen	651

14.4.1	Zusammenhang mit elliptischen Integralen	651
14.4.2	Jacobische Funktionen	654
14.4.3	Thetafunktionen	656
14.4.4	Weierstrasssche Funktionen	656
15	Integraltransformationen	658
15.1	Begriff der Integraltransformation	658
15.1.1	Allgemeine Definition der Integraltransformationen	658
15.1.2	Spezielle Integraltransformationen	658
15.1.3	Umkehrtransformationen	658
15.1.4	Linearität der Integraltransformationen	658
15.1.5	Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen	660
15.1.6	Anwendungen der Integraltransformationen	660
15.2	Laplace-Transformation	661
15.2.1	Eigenschaften der Laplace-Transformation	661
15.2.1.1	Laplace-Transformierte, Original- und Bildbereich	661
15.2.1.2	Rechenregeln zur Laplace-Transformation	662
15.2.1.3	Bildfunktionen spezieller Funktionen	665
15.2.2	Rücktransformation in den Originalbereich	668
15.2.2.1	Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen	668
15.2.2.2	Partialbruchzerlegung	668
15.2.2.3	Reihenentwicklungen	669
15.2.2.4	Umkehrintegral	670
15.2.3	Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation	670
15.2.3.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	671
15.2.3.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten	672
15.2.3.3	Partielle Differentialgleichungen	672
15.3	Fourier Transformation	674
15.3.1	Eigenschaften der Fourier-Transformation	674
15.3.1.1	Fourier-Integral	674
15.3.1.2	Fourier-Transformation und Umkehrtransformation	675
15.3.1.3	Rechenregeln zur Fourier Transformation	677
15.3.1.4	Bildfunktionen spezieller Funktionen	680
15.3.2	Lösung von Differential-Gleichungen mit Hilfe der Fourier Transformation	681
15.3.2.1	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen	681
15.3.2.2	Partielle Differentialgleichungen	682
15.4	Z-Transformation	683
15.4.1	Eigenschaften der Z-Transformation	683
15.4.1.1	Diskrete Funktionen	683
15.4.1.2	Definition der Z-Transformation	683
15.4.1.3	Rechenregeln	685
15.4.1.4	Zusammenhang mit der Laplace Transformation	686
15.4.1.5	Umkehrung der Z Transformation	686
15.4.2	Anwendungen der Z Transformation	687
15.4.2.1	Allgemeine Lösung linearer Differenzgleichungen	687
15.4.2.2	Differenzgleichung zweiter Ordnung (Anfangswertaufgabe)	688
15.4.2.3	Differenzgleichung zweiter Ordnung (Randwertaufgabe)	689

16	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik	690
16.1	Kombinatorik	690
16.1.1	Permutationen	690
16.1.2	Kombinationen	690
16.1.3	Variationen	691
16.1.4	Zusammenstellung der Formeln der Kombinatorik	692
16.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	692
16.2.1	Ereignisse, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	692
16.2.1.1	Ereignisse	692
16.2.1.2	Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	693
16.2.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von BAYES	694
16.2.2	Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen	695
16.2.2.1	Zufallsveränderliche	695
16.2.2.2	Verteilungsfunktion	696
16.2.2.3	Mehrdimensionale Zufallsveränderliche	697
16.2.2.4	Erwartungswert und Streuung, Tschebyscheffsche Ungleichung	697
16.2.2.5	Diskrete Verteilungen	698
16.2.2.6	Stetige Verteilungen	701
16.2.3	Gesetze der großen Zahlen, Grenzwertsätze	706
16.3	Mathematische Statistik	708
16.3.1	Stichprobenfunktionen	708
16.3.1.1	Grundgesamtheit, Stichproben, Zufallsvektor	708
16.3.1.2	Stichprobenfunktionen	708
16.3.2	Beschreibende Statistik	709
16.3.2.1	Statistische Erfassung gegebener Meßwerte	709
16.3.2.2	Statistische Parameter	710
16.3.3	Wichtige Prüfverfahren	711
16.3.3.1	Prüfen auf Normalverteilung	712
16.3.3.2	Verteilung der Stichprobenmittelwerte	714
16.3.3.3	Vertrauensgrenzen für den Mittelwert	714
16.3.3.4	Vertrauensgrenzen für die Streuung	715
16.3.3.5	Prinzip der Prüfverfahren	716
16.3.4	Korrelation und Regression	716
16.3.4.1	Lineare Korrelation bei zwei meßbaren Merkmalen	716
16.3.4.2	Lineare Regression bei zwei meßbaren Merkmalen	717
16.3.4.3	Mehrdimensionale Regression	718
16.3.5	Monte-Carlo-Methode	720
16.3.5.1	Simulation	720
16.3.5.2	Zufallszahlen	720
16.3.5.3	Beispiel für eine Monte-Carlo-Simulation	721
16.3.5.4	Anwendungen der Monte-Carlo-Methode in der numerischen Mathematik	722
16.3.5.5	Weitere Anwendungen der Monte-Carlo-Methode	724
16.4	Theorie der Meßfehler	724
16.4.1	Meßfehler und ihre Verteilung	724
16.4.1.1	Meßfehlereinteilung nach qualitativen Merkmalen	724
16.4.1.2	Fehlerverteilung, wichtige Parameter	725
16.4.1.3	Meßfehlereinteilung nach quantitativen Merkmalen	726
16.4.1.4	Angabe von Meßergebnissen mit Fehlergrenzen	729
16.4.1.5	Fehlerrechnung für direkte Messungen gleicher Genauigkeit	730
16.4.1.6	Fehlerrechnung für direkte Messungen ungleicher Genauigkeit	730
16.4.2	Fehlerfortpflanzung und Fehleranalyse	731

16.4.2.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	731
16.4.2.2	Fehleranalyse	733

17	Dynamische Systeme und Chaos	734
17.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen und Abbildungen	734
17.1.1	Dynamische Systeme	734
17.1.1.1	Grundbegriffe	734
17.1.1.2	Invariante Mengen	736
17.1.2	Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen	737
17.1.2.1	Existenz des Flusses und Phasenraumstruktur	737
17.1.2.2	Lineare Differentialgleichungen	739
17.1.2.3	Stabilitätstheorie	740
17.1.2.4	Invariante Mannigfaltigkeiten	743
17.1.2.5	Poincaré Abbildung	747
17.1.2.6	Topologische Äquivalenz von Differentialgleichungen	748
17.1.3	Diskrete dynamische Systeme	749
17.1.3.1	Ruhelagen, periodische Orbits und Grenzmengen	749
17.1.3.2	Invariante Mannigfaltigkeiten	750
17.1.3.3	Topologische Konjugiertheit von diskreten Systemen	751
17.1.4	Strukturelle Stabilität (Robustheit)	751
17.1.4.1	Strukturstabile Differentialgleichungen	751
17.1.4.2	Strukturstabile diskrete Systeme	752
17.1.4.3	Generische Eigenschaften	752
17.2	Quantitative Beschreibung von Attraktoren	753
17.2.1	Wahrscheinlichkeitsmaße auf Attraktoren	753
17.2.1.1	Invariantes Maß	753
17.2.1.2	Elemente der Ergodentheorie	754
17.2.2	Entropien	756
17.2.2.1	Topologische Entropie	756
17.2.2.2	Metrische Entropie	757
17.2.3	Lyapunov-Exponenten	757
17.2.4	Dimensionen	759
17.2.4.1	Metrische Dimensionen	759
17.2.4.2	Auf invariante Maße zurückgehende Dimensionen	761
17.2.4.3	Lokale Hausdorff- Dimension nach Douady -Oesterlé	763
17.2.4.4	Beispiele von Attraktoren	764
17.2.5	Seltsame Attraktoren und Chaos	766
17.2.6	Chaos in eindimensionalen Abbildungen	766
17.3	Bifurkationstheorie und Wege zum Chaos	767
17.3.1	Bifurkationen in Morse-Smale-Systemen	767
17.3.1.1	Lokale Bifurkationen nahe Ruhelagen	767
17.3.1.2	Lokale Bifurkationen nahe einem periodischen Orbit	773
17.3.1.3	Globale Bifurkationen	776
17.3.2	Übergänge zum Chaos	776
17.3.2.1	Kaskade von Periodenverdopplungen	777
17.3.2.2	Intermittenz	777
17.3.2.3	Globale homokline Bifurkationen	778
17.3.2.4	Auflösung eines Torus	779

18 Optimierung	784
18.1 Lineare Optimierung	784
18.1.1 Problemstellung und geometrische Darstellung	784
18.1.1.1 Formen der linearen Optimierung	784
18.1.1.2 Beispiele und graphische Lösungen	785
18.1.2 Grundbegriffe der linearen Optimierung, Normalform	786
18.1.2.1 Ecke und Basis	787
18.1.2.2 Normalform der linearen Optimierungsaufgabe	787
18.1.3 Simplexverfahren	789
18.1.3.1 Simplextableau	789
18.1.3.2 Übergang zum neuen Simplextableau	789
18.1.3.3 Bestimmung eines ersten Simplextableaus	791
18.1.3.4 Revidiertes Simplexverfahren	792
18.1.3.5 Dualität in der linearen Optimierung	793
18.1.4 Spezielle lineare Optimierungsprobleme	794
18.1.4.1 Transportproblem	794
18.1.4.2 Zuordnungsproblem	797
18.1.4.3 Verteilungsproblem	797
18.1.4.4 Rundreiseproblem	798
18.1.4.5 Reihenfolgeproblem	798
18.2 Nichtlineare Optimierung	799
18.2.1 Problemstellung und theoretische Grundlagen	799
18.2.1.1 Problemstellung	799
18.2.1.2 Optimalitätsbedingungen	799
18.2.1.3 Dualität in der Optimierung	800
18.2.2 Spezielle nichtlineare Optimierungsaufgaben	801
18.2.2.1 Konvexe Optimierung	801
18.2.2.2 Quadratische Optimierung	801
18.2.3 Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsverfahren	802
18.2.3.1 Verfahren von Wolfe	802
18.2.3.2 Verfahren von Hildreth- d'Esopo	804
18.2.4 Numerische Suchverfahren	804
18.2.4.1 Eindimensionale Suche	805
18.2.4.2 Minimumsuche im n -dimensionalen euklidischen Vektorraum	805
18.2.5 Verfahren für unrestringierte Aufgaben	806
18.2.5.1 Verfahren des steilsten Abstieges (Gradientenverfahren)	806
18.2.5.2 Newton-Verfahren	806
18.2.5.3 Verfahren der konjugierten Gradienten	807
18.2.5.4 Verfahren von Davidon, Fletcher und Powell (DFP)	807
18.2.6 Gradientenverfahren für Probleme mit Ungleichungsrestriktionen	808
18.2.6.1 Verfahren der zulässigen Richtungen	808
18.2.6.2 Verfahren der projizierten Gradienten	810
18.2.7 Straf- und Barriereverfahren	812
18.2.7.1 Strafverfahren	812
18.2.7.2 Barriereverfahren	813
18.2.8 Schnittebenenverfahren	814
18.3 Diskrete dynamische Optimierung	815
18.3.1 Diskrete dynamische Entscheidungsmodelle	815
18.3.1.1 n -stufige Entscheidungsprozesse	815
18.3.1.2 Dynamische Optimierungsprobleme	815
18.3.2 Beispiele diskreter Entscheidungsmodelle	815
18.3.2.1 Ein Einkaufsproblem	815

18.3.2.2	Rucksackproblem	816
18.3.3	Bellmannsche Funktionalgleichungen	816
18.3.3.1	Eigenschaften der Kostenfunktion	816
18.3.3.2	Formulierung der Funktionalgleichungen	817
18.3.4	Bellmannsches Optimalitätsprinzip	817
18.3.5	Bellmannsche Funktionalgleichungsmethode	818
18.3.5.1	Bestimmung der minimalen Kosten	818
18.3.5.2	Bestimmung der optimalen Politik	818
18.3.6	Beispiele zur Anwendung der Funktionalgleichungsmethode	819
18.3.6.1	Optimale Einkaufspolitik	819
18.3.6.2	Das Rucksackproblem	819
19	Numerische Mathematik	821
19.1	Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen mit einer Unbekannten	821
19.1.1	Iterationsverfahren	821
19.1.1.1	Gewöhnliches Iterationsverfahren	821
19.1.1.2	Newton-Verfahren	822
19.1.1.3	Regula falsi	823
19.1.2	Lösung von Polynomgleichungen	824
19.1.2.1	Horner-Schema	824
19.1.2.2	Lage der Nullstellen	825
19.1.2.3	Numerische Verfahren	826
19.2	Numerische Lösung von Gleichungssystemen	827
19.2.1	Lineare Gleichungssysteme	827
19.2.1.1	Dreieckszerlegung einer Matrix	827
19.2.1.2	Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix	829
19.2.1.3	Orthogonalisierungsverfahren	830
19.2.1.4	Iteration in Gesamt- und Einzelschritten	832
19.2.2	Nichtlineare Gleichungssysteme	833
19.2.2.1	Gewöhnliches Iterationsverfahren	833
19.2.2.2	Newton-Verfahren	834
19.2.2.3	Ableitungsfreies Gauß-Newton Verfahren	834
19.3	Numerische Integration	835
19.3.1	Allgemeine Quadraturformel	835
19.3.2	Interpolationsquadraturen	835
19.3.2.1	Trapezformel	836
19.3.2.2	Hermiteische Trapezformel	836
19.3.2.3	Simpson-Formel	836
19.3.3	Quadraturformeln vom Gauß-Typ	836
19.3.3.1	Gaußsche Quadraturformeln	837
19.3.3.2	Lobattosche Quadraturformeln	837
19.3.4	Verfahren von Romberg	837
19.3.4.1	Algorithmus des Romberg-Verfahrens	838
19.3.4.2	Extrapolationsprinzip	838
19.4	Genäherte Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen	840
19.4.1	Anfangswertaufgaben	840
19.4.1.1	Eulersches Polygonzugverfahren	840
19.4.1.2	Runge Kutta Verfahren	841
19.4.1.3	Mehrschrittverfahren	841
19.4.1.4	Prediktor Korrektor-Verfahren	842
19.4.1.5	Konvergenz, Konsistenz, Stabilität	843
19.4.2	Randwertaufgaben	844

	19.4.2.1	Differenzenverfahren	844
	19.4.2.2	Ansatzverfahren	845
	19.4.2.3	Schießverfahren	846
19.5		Genäherte Integration von partiellen Differentialgleichungen	847
	19.5.1	Differenzenverfahren	847
	19.5.2	Ansatzverfahren	848
	19.5.3	Methode der finiten Elemente (FEM)	849
19.6		Approximation, Ausgleichsrechnung, Harmonische Analyse	852
	19.6.1	Polynominterpolation	852
	19.6.1.1	Newtonsche Interpolationsformel	854
	19.6.1.2	Interpolation nach Aitken–Neville	854
	19.6.2	Approximation im Mittel	855
	19.6.2.1	Stetige Aufgabe, Normalgleichung	855
	19.6.2.2	Diskrete Aufgabe, Normalgleichung, Householder–Verfahren	856
	19.6.2.3	Mehrdimensionale Aufgaben	857
	19.6.2.4	Nichtlineare Quadratmittelaufgaben	858
	19.6.3	Tschebyscheff–Approximation	859
	19.6.3.1	Aufgabenstellung und Alternantensatz	859
	19.6.3.2	Remes Algorithmus	860
	19.6.3.3	Diskrete Tschebyscheff Approximation und Optimierung	861
	19.6.4	Harmonische Analyse	862
	19.6.4.1	Formeln zur trigonometrischen Interpolation	862
	19.6.4.2	Schnelle Fourier Transformation (FFT)	863
19.7		Darstellung von Kurven und Flächen mit Hilfe von Splines	867
	19.7.1	Kubische Splines	867
	19.7.1.1	Interpolationssplines	867
	19.7.1.2	Ausgleichssplines	868
	19.7.2	Bikubische Splines	868
	19.7.2.1	Bikubische Interpolationssplines	869
	19.7.2.2	Bikubische Ausgleichssplines	870
	19.7.3	Bernstein–Bézier–Darstellung von Kurven und Flächen	870
	19.7.3.1	Prinzip der B–B–Kurvendarstellung	871
	19.7.3.2	B–B–Flächendarstellung	871
19.8		Nutzung von Computern	871
	19.8.1	Interne Zeichendarstellung	871
	19.8.1.1	Zahlensysteme	872
	19.8.1.2	Interne Zahlendarstellung	873
	19.8.2	Numerische Probleme beim Rechnen auf Computern	874
	19.8.2.1	Einführung	874
	19.8.2.2	Normalisierte Dezimalzahlen und Rundung	875
	19.8.2.3	Genauigkeitsfragen beim numerischen Rechnen	876
	19.8.3	Bibliotheken numerischer Verfahren	880
	19.8.3.1	NAG Bibliothek	880
	19.8.3.2	IMSL Bibliothek	880
	19.8.3.3	FORTTRAN SSL II	881
	19.8.3.4	Aachener Bibliothek	881
	19.8.4	Anwendung von Computeralgebrasystemen	881
	19.8.4.1	Mathematica	881
	19.8.4.2	Maple	885

20	Computeralgebrasysteme	889
20.1	Computeralgebra · Allgemeine Bemerkungen	889
20.1.1	Kurzcharakteristik von Computeralgebrasystemen	889
20.1.2	Einführende Beispiele für die Hauptanwendungsgebiete	889
20.1.2.1	Formelmanipulation	889
20.1.2.2	Numerische Berechnungen	890
20.1.2.3	Graphische Darstellungen	891
20.1.2.4	Programmierung in Computeralgebrasystemen	891
20.1.3	Aufbau und Umgang mit Computeralgebrasystemen	891
20.1.3.1	Hauptstrukturelemente	891
20.1.3.2	Mathematica	892
20.1.3.3	Maple	903
20.2	Anwendungen von Computeralgebrasystemen	913
20.2.1	Manipulation algebraischer Ausdrücke	913
20.2.1.1	Mathematica	913
20.2.1.2	Maple	915
20.2.2	Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen	918
20.2.2.1	Mathematica	919
20.2.2.2	Maple	920
20.2.3	Elemente der linearen Algebra	922
20.2.3.1	Mathematica	922
20.2.3.2	Maple	924
20.2.4	Differential- und Integralrechnung	926
20.2.4.1	Mathematica	926
20.2.4.2	Maple	929
20.3	Graphik in Computeralgebrasystemen	932
20.3.1	Graphik mit Mathematica	932
20.3.1.1	Syntax der Graphikdarstellung	934
20.3.1.2	Zweidimensionale Kurven	936
20.3.1.3	Parameterdarstellung von Kurven	937
20.3.1.4	Darstellung von Flächen und Raumkurven	938
20.3.2	Graphik mit Maple	940
20.3.2.1	Zweidimensionale Graphik	940
20.3.2.2	Dreidimensionale Graphik	943
21	Tabellen	945
21.1	Häufig gebrauchte Konstanten	945
21.2	Naturkonstanten	945
21.3	Potenzreihenentwicklungen	947
21.4	Fourier-Entwicklungen	952
21.5	Unbestimmte Integrale *	955
21.5.1	Integrale rationaler Funktionen	955
21.5.1.1	Integrale, die $ax + b$ enthalten	955
21.5.1.2	Integrale, die $ax^2 + bx + c$ enthalten	958
21.5.1.3	Integrale, die $a^2 \pm x^2$ enthalten	959
21.5.1.4	Integrale, die $a^3 \pm x^3$ enthalten	961
21.5.1.5	Integrale, die $a^4 + x^4$ enthalten	962
21.5.1.6	Integrale, die $a^4 - x^4$ enthalten	962
21.5.1.7	Einige Fälle der Partialbruchzerlegung	962
21.5.2	Integrale irrationaler Funktionen	963
21.5.2.1	Integrale, die $\sqrt{x}$ und $a^2 \pm b^2x$ enthalten	963
21.5.2.2	Andere Integrale, die $\sqrt{x}$ enthalten	963

21.5.2.3	Integrale, die $\sqrt{ax+b}$ enthalten	964
21.5.2.4	Integrale, die $\sqrt{ax+b}$ und $\sqrt{fx+g}$ enthalten	965
21.5.2.5	Integrale, die $\sqrt{a^2-x^2}$ enthalten	966
21.5.2.6	Integrale, die $\sqrt{x^2+a^2}$ enthalten	968
21.5.2.7	Integrale, die $\sqrt{x^2-a^2}$ enthalten	970
21.5.2.8	Integrale, die $\sqrt{ax^2+bx+c}$ enthalten	972
21.5.2.9	Integrale, die andere irrationale Ausdrücke enthalten	974
21.5.2.10	Rekursionsformeln für das Integral eines binomischen Differentials	974
21.5.3	Integrale trigonometrischer Funktionen	975
21.5.3.1	Integrale, die die Sinusfunktion enthalten	975
21.5.3.2	Integrale, die die Kosinusfunktion enthalten	977
21.5.3.3	Integrale, die die Sinus- und die Kosinusfunktion enthalten	980
21.5.3.4	Integrale, die die Tangensfunktion enthalten	984
21.5.3.5	Integrale, die die Kotangensfunktion enthalten	985
21.5.4	Integrale anderer transzendenter Funktionen	985
21.5.4.1	Integrale der Hyperbelfunktionen	985
21.5.4.2	Integrale von Exponentialfunktionen	987
21.5.4.3	Integrale logarithmischer Funktionen	988
21.5.4.4	Integrale der inversen trigonometrischen Funktionen	989
21.5.4.5	Integrale der inversen Hyperbelfunktion	991
21.6	Bestimmte Integrale	992
21.6.1	Integrale von trigonometrischen Funktionen	992
21.6.2	Integrale von Exponentialfunktionen	992
21.6.3	Integrale logarithmischer Funktionen	994
21.6.4	Integrale algebraischer Funktionen	996
21.7	Elliptische Integrale	997
21.7.1	Elliptische Integrale 1. Art $F(\varphi, k)$, $k = \sin \alpha$	997
21.7.2	Elliptische Integrale 2. Art $E(\varphi, k)$, $k = \sin \alpha$	997
21.7.3	Vollständige elliptische Integrale, $k = \sin \alpha$	998
21.8	Gammafunktion	999
21.9	Besselsche Funktionen (Zylinderfunktionen)	1000
21.10	Legendresche Polynome (Kugelfunktionen)	1002
21.11	Laplace Transformationen	1003
21.12	Fourier-Transformationen	1009
21.12.1	Kosinus-Fourier-Transformationen	1009
21.12.2	Sinus Fourier-Transformationen	1015
21.12.3	Exponentielle Fourier Transformationen	1020
21.13	Z-Transformationen	1022
21.14	Poisson-Verteilung	1025
21.15	Normierte Normalverteilung	1027
21.16	χ^2 -Verteilung	1028
21.17	Fishersche F -Verteilung	1029
21.18	Studentsche t Verteilung	1031

22 Literatur

1032

Stichwortverzeichnis

1047