

Inhaltsverzeichnis

I. Kapitel:

Begründung der Variationsrechnung durch EULER, LAGRANGE und HAMILTON

	Seite
1. Die Anfänge der Variationsrechnung bei EULER und LAGRANGE	1
§ 1. Die Entstehung und die ältesten Probleme der Variationsrechnung . .	1
§ 2. EULERS Polygonmethode	6
§ 3. Die Lagrangesche Methode	16
2. Die Bedeutung der Variationsrechnung für die Physik und technische Mechanik	28
§ 1. Die wichtigsten Variationsprinzipie	28
§ 2. Anwendungen auf Analogiebetrachtungen	33
§ 3. Anwendung bei Transformationen	37
3. Das homogene Problem	39
§ 1. Die Eulerschen Gleichungen in Parameterdarstellung	39
§ 2. Die Eulerschen Gleichungen in natürlichen Koordinaten	46
§ 3. Anwendungen	47
Strahlendurchgang durch isotropes Medium; MAXWELLS Theorie des Fischeauges; Bestimmung aller Variationsprobleme bei denen die Extremalen Gerade sind; Flächen, bei denen sich die geodätischen Linien auf gerade Linien abbilden lassen; Hilbertsche Geometrie und Geometrie der spezifischen Maßbestimmung.	
§ 4. Indikatrix und Figuratrix	52
4. Die Hamiltonsche charakteristische Funktion und ihre Anwendungen . .	61
§ 1. Die ersten Differentialquotienten; die Weierstraßsche und Legendresche notwendige Bedingung	61
§ 2. Transversalitätsbedingung (freie Randbedingungen)	69
Trichter von M. E. SINCLAIR; Kurs im ortsabhängigen Strömungsfeld; maximaler Unternehmerrgewinn; Kapillarität; Balkentheorie.	
§ 3. Historische Notizen über HAMILTON und seine grundlegenden Ideen; Beispiele dazu	83
Kartesische Flächen; elementare Theorie des Schmidtschen Spiegelteleskops nach CARATHÉODORY; POINCARÉS Modell der nichteuklidischen Geometrie.	
§ 4. Hamilton-Jacobische Integrationstheorie	91
§ 5. Weitere Anwendungen der Hamiltonschen Formeln	101
Erdmann-Weierstraßsche Eckenbedingung; Brechungsgesetz; Ausnützung von Invarianzeigenschaften zur Herleitung von Integralen.	
§ 6. Eine Eigenschaft der Hamiltonschen charakteristischen Funktion beim Punkt-Punkt-Problem	106
§ 7. Die Legendresche Transformation der Veränderlichen	107
§ 8. Die kanonische Form der Gleichungen der Variationsrechnung . . .	109
Expliziter Beweis des Hauptsatzes der Hamilton-Jacobischen Theorie bei n Veränderlichen; Störungstheorie.	

§ 9. Einige Anwendungen der kanonischen Form auf physikalische und geometrische Probleme	113
Liouvillescher Satz; Extremalendichte; Croftonsche Formeln; Satz von STRAUBEL.	
5. Elimination zyklischer Veränderlicher	120
§ 1. Transformation von ROUTH	120
§ 2. Transformation von Variationsproblemen, die die unabhängige Variable nicht explizit enthalten	123
§ 3. Jacobisches Prinzip der kleinsten Wirkung	124
Wurfparabel, Planetenbewegung.	
§ 4. Einführung des elektronischen Brechungsindex	127
§ 5. Elimination der zyklischen Veränderlichen in der Elektronenoptik . .	129
Verallgemeinerter Satz von LIPPICH.	

II. Kapitel:

Begründung der Theorie der zweiten Variation durch LEGENDRE und JACOBI

1. Die Begründung der Theorie durch LEGENDRE	132
§ 1. Die Legendresche Transformation der zweiten Variation	132
Kritik an der Legendreschen Schlußweise.	
§ 2. Direkte Herleitung der Legendreschen notwendigen Bedingung nach ROUSSEL	136
2. Die Jacobische Theorie	139
§ 1. Die Jacobische Gleichung	139
§ 2. Konjugierte Punkte	145
§ 3. Der Satz von STURM	146
§ 4. Das Jacobische Theorem und die geometrische Deutung der konjugierten Punkte	148
§ 5. Beispiele zur Theorie der konjugierten Punkte	152
Die konjugierten Punkte am Äquator einer Rotationsfläche; die konjugierten Punkte am Äquator einer „gewölbten Ecke“; die konjugierten Punkte auf den geodätischen Linien einer kreiszylindrischen Dose; Fokussierung der Elektronenbahnen in einem Zylinderkondensator; maximaler Blasendruck; das Newtonsche Abbildungsgesetz in der Elektronenoptik; die konjugierten Punkte bei der Kepler-Ellipse und bei der Wurfparabel.	
§ 6. Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer unabhängiger Variabler und höherer Differentialquotienten im Variationsproblem	177
Begriff des adjungierten Differentialausdrucks; zweite Variation bei Variationsproblemen mit einer unabhängigen Veränderlichen und höheren Differentialquotienten; Theorie der zweiten Variation bei Doppelintegralen; Bericht über die Untersuchungen von H. A. SCHWARZ über das Problem der Minimalflächen.	

III. Kapitel:

Die Kritik von WEIERSTRASS und DU BOIS-REYMOND und die Aufstellung hinreichender Bedingungen durch WEIERSTRASS

1. Kritik von WEIERSTRASS und DU BOIS-REYMOND	193
§ 1. Kritik der Grundlagen	193
Absolutes und relatives Minimum; eigentliches und uneigentliches Minimum.	

§ 2. Variationsprobleme, bei denen der Integrand positiv ist und nur von der Richtung abhängt	197
Geknickte Extremalen.	
§ 3. Das Lemma von DU BOIS-REYMOND und die sich daraus ergebenden Folgerungen.	201
Einfache Integrale. Doppelintegrale. Beispiele.	
§ 4. WEIERSTRASS' Kritik an der Dirichletschen Schlußweise	218
2. Hinreichende Bedingung für das relative Minimum	225
§ 1. Feldbegriff und Unabhängigkeitssatz	225
§ 2. Hinreichende Bedingung für das starke Extremum beim homogenen Problem	230
Unterschied zwischen homogenem und inhomogenem Problem.	
§ 3. Hinreichende Bedingung für das schwache Extremum	233
§ 4. Brennpunkte	234
§ 5. Knickung eines tragenden, einseitig eingespannten elastischen Stabes	238
§ 6. Der Knesersche Satz über die Einhüllende von Extremalenscharen . .	242
§ 7. Die zweiten Ableitungen der Hamiltonschen charakteristischen Funktion	244
§ 8. Zusammenhang der Feldtheorie mit der Fundamentalformel der zweiten Variation	249
§ 9. Ermittlung von konjugierten Punkten und Brennpunkten, wenn das Variationsproblem bei Transformationen invariant bleibt	250

IV. Kapitel:

Probleme mit Nebenbedingungen

1. Theorie der ersten Variation.	253
§ 1. Allgemeine Formulierung des Problems mit Nebenbedingungen nach LAGRANGE	253
§ 2. Formulierung des Punkt-Punkt-Problems mit Nebenbedingungen nach LAGRANGE	256
MAYERS Kritik an LAGRANGES Schlußweise.	
§ 3. Vorbereitung auf den Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorregel .	259
§ 4. Hauptsatz über unterbestimmte Systeme	263
Freie und gebundene Bogen; Erläuterung an Beispielen; Hinweis auf die Bedeutung dieser Begriffe bei der Carathéodoryschen Grundlegung der Thermodynamik; Charakteristiken der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung.	
§ 5. Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel	275
§ 6. Bemerkungen zur Lagrangeschen Multiplikatorenregel. Das Mayer-sche Problem	277
Normale und anormale Bögen; Aufspaltungserscheinungen; Klasse eines Extremalenbogens; Lagrangesche Gleichungen in kanonischer Form; Lagrangesche Faktoren beim isoperimetrischen Problem; das Mayersche Problem; ZERMELOS Navigationsproblem.	
§ 7. Formulierung des Lagrangeschen Problems mit variablen Grenzen und Randfunktion (Problem von BOLZA)	284

§ 8. Gleichzeitige Variation von abhängigen und unabhängigen Veränderlichen bei Variationsproblemen ohne Nebenbedingungen und ohne Randfunktionen	287
Variationsprobleme mit einer unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen; Variationsprobleme mit einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen; Variationsprobleme mit r unabhängigen und k abhängigen Veränderlichen.	
§ 9. Herleitung der freien Randbedingungen für die erste Variation . . .	295
2. Einleitung in die Theorie der zweiten Variation	298
§ 1. Herleitung der Differentialgleichungen und der Randbedingungen für das akzessorische Problem. Bedingung für das Verschwinden der zweiten Variation	298
§ 2. Hinweise für die praktische Behandlung von Aufgaben der zweiten Variation beim allgemeinen Lagrangeschen Problem	303
3. Beispiele	305
§ 1. Kürzeste Entfernung von Raumkurven und Flächen	305
Kürzeste Entfernung zweier Raumkurven; kürzeste Entfernung zweier Flächen.	
§ 2. Ebene Probleme der Elastostatik	309
Stabilität der beiderseits durch Klemmen eingespannten Elastica; der in Klemme und Hülse, in Klemme und Öse gelagerten Elastica; des auf zwei Stützen frei aufliegenden dünnen, in der Mitte belasteten Stabes.	
§ 3. Stabilität der Trennungsflächen zwischen Flüssigkeiten	326

V. Kapitel:

Die Verwendung der Quasikoordinaten

§ 1. Historische Bemerkungen	329
Die Eulerschen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers.	
§ 2. Allgemeine Erörterung der Methode der Quasikoordinaten	336
§ 3. Anwendung der Quasikoordinaten bei räumlichen Problemen der Elastostatik von Stäben. KIRCHHOFFS Analogie	339
§ 4. Integrale der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen	342
Energieintegral. Drehimpulsintegral.	
§ 5. Gegenüberstellungen gemäß der Kirchhoffschen Analogie	343
§ 6. Gemeinsamer Ansatz für verschiedene Stabilitätsprobleme der räumlichen Elastica	344
Beispiele: gerade homogene Stäbe unter Druck und Drill.	

VI. Kapitel:

Zusätze zur Theorie der Variationsprobleme mit mehreren Veränderlichen

1. Probleme mit einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen	358
§ 1. Der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz in Räumen mit mehr als zwei Dimensionen	358
§ 2. Relative und absolute Integralinvarianten; Lagrangesche Klammern	364
§ 3. Der allgemeine Enveloppensatz	370

	Seite
§ 4. Anwendung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes in der geometrischen Optik	373
Satz von MALUS.	
2. Probleme mit mehreren unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen	376
§ 1. Einleitung. Unterschied des Feldbegriffs bei Problemen mit einer und mit mehreren unabhängigen Veränderlichen	376
§ 2. Alternierende Differentialformen. Verallgemeinerung der Integralsätze von STOKES und GAUSS. Transversalität	382
§ 3. Umkehrsatz von POINCARÉ. Bedingungen für das identische Verschwinden der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen. Darstellung von geschlossenen Differentialformen	401
§ 4. Verallgemeinerung des Hilbertschen Unabhängigkeitsintegrals	410
Allgemeine Feldtheorie von LEPAGE; Feldtheorien von DE DONDER-WEYL und von CARATHÉODORY; Variationsprobleme mit beweglichem Rand.	
§ 5. Verallgemeinerung des Hilbertschen Problems. Abschließende Bemerkungen	433
3. Die Sätze von E. NOETHER	437
§ 1. Einleitung. Der Noethersche Satz für endliche kontinuierliche Transformationsgruppen	437
Beispiele; Erhaltungssätze der Newtonschen Mechanik.	
§ 2. Der Noethersche Satz für unendliche kontinuierliche Transformationsgruppen	445
Beispiele; Hilbertsche Fassung der allgemeinen physikalischen Feldtheorie.	

VII. Kapitel:

Die direkten Methoden der Variationsrechnung

1. Existenz des Minimums.	452
§ 1. Einleitung	452
§ 2. Stetigkeit und Halbstetigkeit von Funktionalen	455
§ 3. Existenz des Minimums.	459
Beispiele.	
§ 4. Anwendung des Existenzbeweises auf den Nachweis periodischer Lösungen bei einem Schwingungsproblem	465
2. Numerische Methoden	468
§ 1. Die Ritzsche Methode	468
Die Methode von RITZ und verwandte Methoden.	
§ 2. Die Behandlung des Duffingschen Schwingungsproblems nach HAMEL	478
§ 3. Anwendung der Rayleigh-Ritzschen Methode zur Berechnung von Eigenwerten	479
Schwingende Saite; Stimmgabel; piezoelektrische Schwingungen; doppelwandiger Druckstab; Linsenformel für das Elektronenmikroskop.	
§ 4. Kennzeichnung der höheren Eigenwerte durch ein Maximum-Minimum-Prinzip	490
§ 5. Prinzip der formalen Differentiation eines Extremums	493
Anwendungen; Satz von H. SCHAEFER über Eigenwertpaare.	

VIII. Kapitel:

Das Prinzip von FRIEDRICHS und seine Anwendung auf elastostatische Probleme

	Seite
§ 1. Einleitendes Beispiel aus der Fachwerktheorie	498
§ 2. Allgemeine Umformung gewöhnlicher Extremalprobleme	505
§ 3. Allgemeine Umformung von Variationsproblemen	507
§ 4. Anwendung auf die Balkentheorie	513
§ 5. Allgemeine Fassung der Prinzipie von DIRICHLET und CASTIGLIANO	515
§ 6. Anwendung auf das Torsionsproblem elastischer Stäbe	531

IX. Kapitel:

Finslersche Geometrie

§ 1. Einleitung	542
§ 2. Die Invarianten der Indikatrix	549
Landsbergischer Winkel; Berwaldscher Hauptskalar; indizierende Ellipse; Element- und Transversalitätsvektor.	
§ 3. Differentiation nach Länge, Breite und Winkel	554
§ 4. Endlicher Längenabstand, Breitenabstand und Winkel	556
§ 5. Flächeninhalt	557
§ 6. Die extremale Krümmung von Kurven	560
§ 7. Das Koordinatensystem der Länge und Breite	564
§ 8. Das Analogon zum Gaußschen Krümmungsmaß	565
Geometrische Deutungen.	
§ 9. Cartansche Vertauschungsformeln. Bianchische Identität	570
§ 10. Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung	573
§ 11. Spezielle Finslersche Räume	576
Finslersche Geometrien, bei denen der Gauß-Bonnetsche Satz über die Totalkrümmung gilt (Landsbergische Geometrie); Variationsprobleme, bei denen Kurven konstanten Breitenabstandes auch Kurven konstanten Längenabstandes sind (Riemannsche Geometrie); Geometrien, bei denen die Extremalen durch lineare Gleichungen dargestellt werden können.	

X. Kapitel:

Zusätze und spezielle Probleme

§ 1. Das Umkehrproblem der Variationsrechnung	581
§ 2. Die Eulersche Knicklast. Ermittlung der Knicklast unter Berücksichtigung des Einflusses der Längenänderung der Stäbe	586
§ 3. Knickung unter Berücksichtigung der Eigenlast	594
§ 4. Das Ausbeulen von ebenen Platten (Bryansche Gleichung)	596
§ 5. Herleitung von Randbedingungen für partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung in einer abhängigen und in zwei unabhängigen Veränderlichen aus einem zugehörigen Variationsproblem, dargestellt am Beispiel der Biegung der dünnen Platte	600
§ 6. Knickung des durch Krümmung versteiften Meßbandes	605
§ 7. Vollkommene optische Instrumente	611

Anhang

	Seite
Historische Bemerkungen	
I. Über die Arbeiten der Brüder BERNOULLI	614
II. Über NEWTONS Problem einer axial angeströmten Rotationsfläche kleinsten Widerstandes	616
III. Über die Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung	621
Anmerkungen	632
Namenverzeichnis.	671
Sachverzeichnis	675