

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Einführung</b>                                                | <b>1</b>  |
| Aufgaben . . . . .                                               | 7         |
| <b>1 Lineare Gleichungssysteme</b>                               | <b>9</b>  |
| 1.1 Beispiele . . . . .                                          | 10        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 13        |
| 1.2 Einige Grundlagen . . . . .                                  | 15        |
| 1.2.1 Vektor- und Matrixnormen . . . . .                         | 15        |
| 1.2.2 Die Kondition einer Matrix . . . . .                       | 25        |
| 1.2.3 Elementarmatrizen . . . . .                                | 28        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 31        |
| 1.3 Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .                 | 33        |
| 1.3.1 Das Prinzip des Gaußschen Eliminationsverfahrens . . . . . | 33        |
| 1.3.2 Die $LR$ -Zerlegung . . . . .                              | 35        |
| 1.3.3 Die $LR$ -Zerlegung von Tridiagonalmatrizen . . . . .      | 40        |
| 1.3.4 Das Gauß-Jordan-Verfahren . . . . .                        | 43        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 47        |
| 1.4 Die Cholesky-Zerlegung . . . . .                             | 49        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 51        |
| 1.5 Die $QR$ -Zerlegung . . . . .                                | 53        |
| 1.5.1 Definition und Motivation . . . . .                        | 53        |
| 1.5.2 Die $QR$ -Zerlegung nach Householder . . . . .             | 55        |
| 1.5.3 Die $QR$ -Zerlegung nach Givens . . . . .                  | 58        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 62        |
| 1.6 Lineare Ausgleichsprobleme . . . . .                         | 64        |
| 1.6.1 Einige Grundlagen . . . . .                                | 64        |
| 1.6.2 Die Singulärwertzerlegung einer Matrix . . . . .           | 66        |
| 1.6.3 Die Pseudoinverse einer Matrix . . . . .                   | 71        |
| 1.6.4 Störung linearer Ausgleichsprobleme . . . . .              | 74        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 79        |
| <b>2 Nichtlineare Gleichungssysteme</b>                          | <b>81</b> |
| 2.1 Einführung . . . . .                                         | 81        |
| Aufgaben . . . . .                                               | 84        |
| 2.2 Allgemeine Konvergenzsätze . . . . .                         | 85        |

|          |                                                                                                       |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.2.1    | Der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .                                                                 | 86         |
| 2.2.2    | Lipschitzstetige Abbildungen . . . . .                                                                | 91         |
| 2.2.3    | Ein lokaler Konvergenzsatz . . . . .                                                                  | 95         |
| 2.2.4    | Die Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens . . . . .                                            | 96         |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 98         |
| 2.3      | Das Newton-Verfahren . . . . .                                                                        | 101        |
| 2.3.1    | Motivation und lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens . . .                                          | 101        |
| 2.3.2    | Quasi-Newton-Verfahren . . . . .                                                                      | 106        |
| 2.3.3    | Die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms . . . . .                                               | 114        |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 118        |
| 2.4      | Iterationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen . . . . .                                         | 123        |
| 2.4.1    | Ein allgemeiner Konvergenzsatz . . . . .                                                              | 123        |
| 2.4.2    | Das Gesamt- und das Einzelschrittverfahren, Relaxationsverfahren . . . . .                            | 125        |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 132        |
| <b>3</b> | <b>Interpolation</b> . . . . .                                                                        | <b>135</b> |
| 3.1      | Interpolation durch Polynome . . . . .                                                                | 136        |
| 3.1.1    | Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung des Interpolationspolynoms . . . . .                          | 136        |
| 3.1.2    | Der Interpolationsfehler . . . . .                                                                    | 140        |
| 3.1.3    | Hermite-Interpolation . . . . .                                                                       | 141        |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 143        |
| 3.2      | Trigonometrische Interpolation . . . . .                                                              | 145        |
| 3.2.1    | Problemstellung, Existenz und Eindeutigkeit des trigonometrischen Interpolationspolynoms . . . . .    | 145        |
| 3.2.2    | Das trigonometrische Interpolationspolynom bei äquidistanten Stützstellen . . . . .                   | 147        |
| 3.2.3    | Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) . . . . .                                                   | 149        |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 157        |
| 3.3      | Interpolation durch Splines . . . . .                                                                 | 160        |
| 3.3.1    | Einführung . . . . .                                                                                  | 160        |
| 3.3.2    | Existenz, Eindeutigkeit und Extremaleigenschaften interpolierender Splines ungeraden Grades . . . . . | 163        |
| 3.3.3    | Die Berechnung interpolierender kubischer Splines . . . . .                                           | 166        |
| 3.3.4    | Fehlerabschätzungen für interpolierende Splines . . . . .                                             | 172        |
| 3.3.5    | B-Splines . . . . .                                                                                   | 176        |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 191        |
| 3.4      | Darstellung von Kurven . . . . .                                                                      | 196        |
| 3.4.1    | Einführung . . . . .                                                                                  | 196        |
| 3.4.2    | Bézier-Kurven . . . . .                                                                               | 199        |
| 3.4.3    | B-Spline-Kurven . . . . .                                                                             | 209        |
|          | Aufgaben . . . . .                                                                                    | 214        |

|                                                                                   |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4 Numerische Integration</b>                                                   | <b>219</b> |
| 4.1 Einführung                                                                    | 219        |
| 4.1.1 Übersicht                                                                   | 219        |
| 4.1.2 Restglieddarstellung mit Hilfe des Peano-Kerns                              | 221        |
| Aufgaben                                                                          | 223        |
| 4.2 Interpolations-Quadraturformeln                                               | 224        |
| 4.2.1 Einfache Grundlagen                                                         | 224        |
| 4.2.2 Die Newton-Cotes-Formeln                                                    | 226        |
| Aufgaben                                                                          | 230        |
| 4.3 Quadraturformeln vom Gaußschen Typ                                            | 230        |
| 4.3.1 Existenz und Eindeutigkeit, Fehlerdarstellung                               | 230        |
| 4.3.2 Orthogonalpolynome zu gegebener Gewichtsfunktion                            | 235        |
| 4.3.3 Die Gauß-Legendre- und die Gauß-Tschebyscheff-Formeln                       | 239        |
| Aufgaben                                                                          | 242        |
| 4.4 Das Romberg-Verfahren                                                         | 243        |
| 4.4.1 Motivation, Euler-Maclaurinsche Summenformel                                | 243        |
| 4.4.2 Extrapolationsverfahren                                                     | 250        |
| Aufgaben                                                                          | 257        |
| 4.5 Ergänzungen                                                                   | 257        |
| 4.5.1 Konvergenz von Quadraturverfahren                                           | 258        |
| 4.5.2 Integrale mit Singularitäten, Integration über ein unendliches<br>Intervall | 260        |
| 4.5.3 Adaptive Quadraturverfahren                                                 | 264        |
| Aufgaben                                                                          | 267        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                                                       | <b>269</b> |
| <b>Index</b>                                                                      | <b>277</b> |