

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Hauptbegriffe der mathematischen Logik. Deduktive Methode.

	Seite
I. Über die Variablen.....	1
1. Konstanten und Variablen	1
2. Ausdrücke, die Variablen enthalten: Satz- und Bezeichnungsfunktionen	2
3. Aufstellung von mathematischen Lehrsätzen mit Hilfe von Variablen.....	4
4. Der Alloperator und der Existenzoperator; freie und gebundene Variablen.....	7
5. Die Bedeutung der Variablen für die Mathematik.....	9
Übungsaufgaben	10
II. Über den Aussagenkalkül.....	12
6. Die spezifisch mathematischen und die logischen Ausdrücke; mathematische Logik	12
7. Der Aussagenkalkül; die Negation eines Satzes, die Konjunktion und die Disjunktion von Sätzen.....	13
8. Die Implikation oder der Bedingungssatz; Bildung von konjugierten Sätzen	16
9. Die Äquivalenz von Sätzen	18
10. Aufstellung von Definitionen; Regeln des Definierens	19
11. Lehrsätze des Aussagenkalküls	22
12. Anwendung von Lehrsätzen des Aussagenkalküls in mathematischen Beweisen	24
13. Regeln des Beweisens, vollständige Beweise.....	26
Übungsaufgaben	28
III. Über die Theorie der Identität.....	31
14. Logische Begriffe außerhalb des Aussagenkalküls; Begriff der Identität	31
15. Wichtigste Lehrsätze aus der Theorie der Identität ..	32
16. Die Gleichheit in der Arithmetik und in der Geometrie und ihre Beziehung zu der logischen Identität.....	35

	Seite
17. Die Quantitätsoperatoren	37
Übungsaufgaben	38
IV. Über die Klassentheorie	41
18. Mengen und ihre Elemente	41
19. Mengen und Satzfunktionen mit einer freien Variablen	43
20. Grundbeziehungen zwischen Mengen.....	45
21. Operationen mit Mengen	47
22. Gleichzählige Mengen, Anzahl der Elemente einer Menge, endliche und unendliche Mengen.....	49
Übungsaufgaben	51
V. Über die Relationstheorie	55
23. Beziehungen, ihre Vorder- und Hinterglieder; Beziehungen und Satzfunktionen mit zwei freien Variablen	55
24. Einige Eigenschaften von Beziehungen	57
25. Beziehungen, die zugleich reflexiv, symmetrisch und transitiv sind; Abstraktionsprinzip	58
26. Ordnungsbeziehungen; Beispiele von anderen Beziehungen.....	60
27. Eindeutige Beziehungen oder Funktionen; die Rolle der Funktionen in der Mathematik selbst sowie in den Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften	62
28. Die Satz- und Bezeichnungsfunktionen und der neue Funktionsbegriff	65
29. Umkehrbare Funktionen und die eindeutige Zuordnung; die Definition des Begriffes der Gleichzähligkeit	66
30. Mehrgliedrige Beziehungen; Funktionen von mehreren Variablen und Operationen	69
31. Die Bedeutung der Logik für die Mathematik.....	71
Übungsaufgaben	72
VI. Über die deduktive Methode.....	78
32. Grundprinzipien des Aufbaus der mathematischen Wissenschaften: Grundbegriffe und definierte Begriffe, Axiome und Theoreme; deduktive Methode als charakteristisches Merkmal der Mathematik	78
33. Formaler Charakter der mathematischen Disziplinen, Modell und Interpretation eines Axiomensystems ...	81
34. Beispiele von Interpretationen der Axiomensysteme.	84
35. Die Willkürlichkeit in der Auswahl von Axiomen und Grundbegriffen; Postulate der Unabhängigkeit.....	87
36. Postulate der Formalisierung von Definitionen und Beweisen, formalisierte deduktive Disziplinen	89

	Seite
37. Das Problem der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit von mathematischen Disziplinen.....	92
Übungsaufgaben	95

Zweiter Teil.

Anwendungen der Logik und der Methodologie beim Aufbau eines Bruchstücks der Arithmetik.

VII. Sätze über die Anordnung von Zahlen.....	98
38. Grundbegriffe des aufzubauenden Bruchstücks der Arithmetik; erste Gruppe von Axiomen.....	98
39. Sätze der Irreflexivität für die Beziehungen »kleiner als« und »größer als«; indirekte Beweise.....	100
40. Weitere Sätze über die Beziehungen »kleiner als« und »größer als«	102
41. Die Beziehungen „ $\leq$ “ und „ $\geq$ “	104
Übungsaufgaben	108
VIII. Sätze über die Addition und die Subtraktion..	110
42. Zweite Gruppe von Axiomen; einige allgemeine Eigenschaften von Operationen, der Begriff der Gruppe und insbesondere der Abelschen Gruppe	110
43. Kommutative und assoziative Gesetze für eine größere Anzahl von Summanden.....	112
44. Die Sätze der Monotonie für die Addition und ihre Umkehrungen; ein neuer Typus von indirekten Beweisen	113
45. Geschlossene Systeme von Sätzen.....	118
46. Folgerungen aus den Sätzen der Monotonie; die üblichste Art von indirekten Beweisen.....	120
47. Definition der Subtraktion; inverse Operationen....	122
48. Bemerkungen über Definitionen, deren Definiendum das Gleichheitszeichen enthält.....	123
49. Sätze, die die Subtraktion betreffen.....	126
Übungsaufgaben	127
IX. Methodologische Betrachtungen über das aufgebaute Bruchstück der Arithmetik.....	132
50. Überflüssige Axiome in dem ursprünglichen Axiomensystem $\mathfrak{A}$, Axiomensystem $\mathfrak{A}'$	132
51. Unabhängigkeit der Axiome des Systems $\mathfrak{A}'$, Beweise durch Interpretation	135
52. Reduktion der Grundbegriffe im Axiomensystem $\mathfrak{A}'$, Axiomensystem $\mathfrak{A}''$; Begriff der geordneten Abelschen Gruppe	137

	Seite
53. Das vereinfachte Axiomensystem $\mathfrak{U}'''$ und seine Äquivalenz mit den vorangehenden Systemen; Bemerkungen über die möglichen Umformungen des Systems von Grundbegriffen	140
54. Das Problem der Widerspruchsfreiheit des betrachteten Bruchstücks der Arithmetik.....	145
55. Das Problem der Vollständigkeit des betrachteten Bruchstücks der Arithmetik.....	146
Übungsaufgaben	147
X. Axiomensysteme für die ganze Arithmetik reeller Zahlen.....	153
56. Unzulänglichkeit des Axiomensystems $\mathfrak{U}$ für die Begründung der ganzen Arithmetik reeller Zahlen; System $\mathfrak{U}^x$, seine Grundbegriffe und Axiome	153
57. Nähere Charakterisierung des Systems $\mathfrak{U}^x$, dichte und stetige Beziehungen; methodologische Vorteile und didaktische Nachteile des Systems $\mathfrak{U}^x$	154
58. Grundbegriffe und Axiome des Systems $\mathfrak{U}^{xx}$	157
59. Nähere Charakterisierung des Systems $\mathfrak{U}^{xx}$: Einheits- element einer Operation, Distributivität einer Opera- tion hinsichtlich einer anderen, der Begriff des Körpers und des geordneten Körpers	158
60. Äquivalenz der Axiomensysteme $\mathfrak{U}^x$ und $\mathfrak{U}^{xx}$; metho- dologische Nachteile und didaktische Vorteile des Systems $\mathfrak{U}^{xx}$	160
Übungsaufgaben	162
Literaturangaben	165