

# Inhaltsverzeichnis.

## Erste Abteilung.

### Planimetrie.

#### A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

#### I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkurses.

	Seite
a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen . . . . .	1
$\alpha$ ) Die Mathematik und ihre Teile . . . . .	1
$\beta$ ) Der mathematische Raum und die geometrischen Gebilde . . . . .	2
$\gamma$ ) Bewegungsbeziehungen und Dimensionen . . . . .	7
$\delta$ ) Gegenseitiges Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde . . . . .	8
$\epsilon$ ) Begriff der Geraden und der Richtungen im Raume . . . . .	9
$\zeta$ ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie . . . . .	11
$\eta$ ) Begriff des Kreises, des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile . . . . .	13
$\theta$ ) Begriff des Winkels in der Ebene . . . . .	16
b) Die einfachsten geometrischen Konstruktionen . . . . .	21
$\alpha$ ) Die Zeichengeräte . . . . .	21
$\beta$ ) Drei Forderungen (Postulate) der Konstruktionslehre . . . . .	23
$\gamma$ ) Die grundlegenden Konstruktionen . . . . .	25
c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks . . . . .	33
$\alpha$ ) Die Parallelensätze . . . . .	33
$\beta$ ) Die Winkelsumme des Dreiecks . . . . .	38
$\gamma$ ) Einige Folgerungen der Parallelensätze . . . . .	39
d) Konstruktionsübungen . . . . .	45
$\alpha$ ) Addition und Subtraktion von Geraden, Winkeln, Kreisbogen . . . . .	45
$\beta$ ) Vervielfachung und Teilung von Geraden, Winkeln, Kreisbogen . . . . .	45
$\gamma$ ) Konstruktion für gewisse Reihen von Winkeln . . . . .	46
$\delta$ ) Konstruktion gewisser Kreisteilungen und regelmäßiger Vielecke . . . . .	47
$\epsilon$ ) Übungen mit regelmäßigen Vielecken . . . . .	47
$\zeta$ ) Zwei Hindernisaufgaben . . . . .	48
$\eta$ ) Einige Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben . . . . .	49

	Seite
e) Begriff der Symmetrie in der Ebene . . . . .	53
$\alpha$ ) Erklärung und Grundsätze der einfachen und mehrfachen Symmetrie	53
$\beta$ ) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie. . . . .	56
$\gamma$ ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck . . . . .	61
$\delta$ ) Symmetrisches über Kreise . . . . .	63

**II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.**

a) Die Lehre von der Kongruenz . . . . .	67
$\alpha$ ) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck. . . . .	67
$\beta$ ) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze . . . . .	73
$\gamma$ ) Dreieckskonstruktionen . . . . .	77
$\delta$ ) Einige andere Konstruktionen . . . . .	78
b) Lehre von den Parallelogrammen . . . . .	81
$\alpha$ ) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung . .	81
$\beta$ ) Quadratkonstruktionen . . . . .	83
$\gamma$ ) Rechteckskonstruktionen . . . . .	85
$\delta$ ) Rhombuskonstruktionen . . . . .	88
$\epsilon$ ) Parallelogrammkonstruktionen . . . . .	90
c) Anfangsgründe der Kreislehre . . . . .	91
$\alpha$ ) Rückblick auf das schon Bekannte . . . . .	91
$\beta$ ) Peripherie- und Zentriwinkel, Tangenten-Sehnenwinkel . . . . .	93
$\gamma$ ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke . . . . .	97
$\delta$ ) Betrachtungen über mehrere Kreise . . . . .	101
$\epsilon$ ) Konstruktionsübungen zur Kreislehre . . . . .	104
d) Flächengleichheit geradliniger Gebilde . . . . .	106
Flächengleiche Parallelogramme und Dreiecke. Satz des Pythagoras. Verwandlung von $n$ -Ecken in Dreiecke, Rechtecke und Quadrate. Quadrate über Summen und Differenzen von Geraden. Satz des Pappus. Satz des Pythagoras für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke. Ergänzungsparallelogramme.	
e) Längen- und Flächenberechnungen an ebenen Gebilden . . . . .	117
Berechnungen am Rechteck und Dreieck. Heronische Flächenformel. Mittlere Proportionale. Trapez. Tangentenviereck. Pythagoreische Zahlen. Kreis als regelmäßiges Vieleck.	
f) Schlußbemerkungen zur planimetrischen Lehraufgabe der Quarta und Untertertia . . . . .	134
Sachliche und genetische Definitionen. Grundsätze und Axiome. Schema für die Behandlung der Lehrsätze. Direkter und indirekter Beweis. Bemerkungen über Konstruktionen und Berechnungen.	

	Seite
<b>B. Planimetrische Lehraufgabe der Obertertia und Untersekunda.</b>	
<b>I. Ähnlichkeitslehre für geradlinige Gebilde . . . . .</b>	137
Verhältnisse am Dreieck. Ähnliche Figuren. Ähnlichkeitsätze für das Dreieck. Ähnlichkeitspunkte bei ähnlichen Vielecken, bei Kreisen und parallelen Geraden. Harmonische Teilung. Ähnlichkeitsbeweis für den Satz des Pythagoras. Übungen am Tangentenviereck.	
<b>II. Proportionen und Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreise . . . . .</b>	153
Sehnen und Sekanten durch einen Punkt. Kreisbüschel und orthogonale Kreischar. Anwendung auf Kartographie. Goldener Schnitt. Regelmäßiges Zehneck, Fünfeck, Fünfzehneck. Heronische Formeln, mit Hilfe der Ähnlichkeit abgeleitet. Regelmäßiges $2n$ -Eck aus dem $n$ -Eck berechnet. Einige Segmente. Lunula des Hippokrates.	
<b>III. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.</b>	
Geometrische Deutung und Konstruktion algebraischer Ausdrücke . . . . .	170
Deutung einfacher Ausdrücke erster und zweiter Dimension. Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis.	

## Zweite Abteilung.

### Arithmetik.

<b>A. Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.</b>	
<b>I. Das Gebiet der gewöhnlichen (absoluten und ganzen) Zahlen . . . . .</b>	183
Die vier Grundrechnungen in gewöhnlichen Zahlen.	
<b>II. Erweiterung des Zahlgebietes durch Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen . . . . .</b>	197
Geometrische Darstellung der Zahlenreihe. Ausdehnung der Rechnungen auf negative und gebrochene Zahlen. Hauptnenner von Brüchen. Primzahlen. Größter gemeinschaftlicher Teiler. Zusammenstellung der Ergebnisse.	
<b>III. Dezimalbrüche . . . . .</b>	208
Rechnungsregeln. Verwandeln gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche und der letzteren in die ersteren. Periodische Dezimalbrüche. Nicht periodische von unendlicher Stellenzahl. Irrationalzahlen. Abgekürztes Rechnen.	
<b>IV. Proportionen . . . . .</b>	213
Verschiedene Schreibweisen derselben Proportion. Ableitung neuer Proportionen aus gegebenen. Sätze über Proportionen.	
<b>V. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten . . . . .</b>	216

**B. Lehraufgabe der Obertertia.**

	Seite
I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten . . . . .	218
II. Rein quadratische Gleichungen und Ausziehen der Quadratwurzel	221
III. Grundform der gemischt quadratischen Gleichung mit einer Un- bekannten . . . . .	229
IV. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten . . . .	230
Zusammenstellung der wesentlichen Ergebnisse . . . . .	237

**C. Lehraufgabe der Untersekunda.**

I. Gleichungen zweiten Grades . . . . .	238
II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten . . . . .	241
III. Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen . . . . .	244
Erklärung dieser Logarithmen. Andeutungen über die Möglichkeit ihrer Berechnung. Logarithmus eines Produktes, eines Bruches, einer Potenz, einer Wurzel. Rechnungserleichterung durch Logarithmen. Anwendungen auf Zinsezinsrechnung.	
Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	252

Dritte Abteilung.

**Trigonometrie.**

**Lehraufgabe der Untersekunda.**

I. Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck . . . . .	253
Die vier Hauptfunktionen. Berechnung der Funktionen für gewisse Winkel. Berechnung einfacher rechtwinkliger Dreiecke. Einfache Beziehungen zwischen den Funktionen. Darstellung der Funktionen durch Linien am Kreise.	
II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmä- ßiger Vielecke . . . . .	258
III. Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck	261
Die Funktionen im zweiten Quadranten und ihre Darstellung durch Linien am Kreise. Sinussatz. Kosinussatz. Inhaltssatz. Die Hauptaufgaben der Dreiecksberechnung. Der Tangentensatz in geometrischer Ableitung.	
Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	269

## Vierte Abtheilung.

## Stereometrie.

## Lehraufgabe der Untersekunda.

	Seite
Vorbemerkungen . . . . .	270
<b>I. Übungen am Würfel und an den aus ihm abgeleiteten Körpern</b>	<b>271</b>
Zeichnen des Würfels in verschiedenen Projektionen. Berechnungen am Würfel. Sein Flächenmaß. Das regelmäßige Achteck, seine Elemente und sein Flächenmaß. Das regelmäßige Vierseck. Seine Elemente und sein Flächenmaß. Durchdringungen zweier Viersecke, zweier Würfel, zweier Achtecke. Der Pyramidenwürfel. Das Rhombendodekaeder und sein Flächenmaß. Das Pentagondodekaeder, aus dem Würfel abgeleitet. Grundriß, Aufriß und Netz des regelmäßigen Zwölfecks. Berechnung seiner Elemente. Ableitung des regelmäßigen Zwanzigsecks aus ihm. Das dem Oktaeder einbeschriebene Ikosaeder. Zwei demselben Würfel umbeschriebene Dodekaeder und zwei demselben Oktaeder einbeschriebene Ikosaeder in ihren Durchdringungen. Konstruktion des Ikosaeders aus dem Achsenkreuz mit stetig geteilter Halbachse. Berechnung seiner Elemente. Grund- und Aufriß des Ikosaeders. Zusammenhang zwischen den Projektionen des Dodekaeders und Ikosaeders. Einige Halbstumpfe und ihre reziproken Körper. Der Stern der fünf regelmäßigen Tetraeder. Bemerkungen über die Platonischen und Archimedischen Körper und ihre reziproken.	
<b>II. Senkrechte Prismen und Zylinder</b> . . . . .	<b>305</b>
Der Rechteckkörper und seine Elemente. Inhaltsformel für senkrechte Prismen und Zylinder von beliebiger Grundfläche. Projektionen von senkrechten Prismen und Zylindern.	
<b>III. Der Satz des Cavalieri und seine wichtigsten Anwendungen</b> . .	<b>310</b>
Planimetrische Veranschaulichung des Satzes. Stereometrische Erläuterung. Einfache Beispiele dazu. Inhaltsformel für Pyramiden und Kegel. Inhalt und Oberfläche der Kugel. Mantelfläche des senkrechten Kreiskegels. Die Formel $J = \frac{Og}{3}$ für Polyeder, die einer Kugel umbeschrieben sind.	
<b>IV. Vermischte Übungsaufgaben</b> . . . . .	<b>316</b>
Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	318
Anhang: Das griechische Alphabet . . . . .	320